CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

1. Calculer u_0 et u_1.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (a) Exprimer, pour $n \geqslant 1, u_n$ en fonction de u_{n-1} et de n.

   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0, u_n = n!\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

2. Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a,\ \text{et pour tout entier } n \geqslant 1,\ v_n = nv_{n-1} - 1$$

   Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

(b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1, c_2, que l'on déterminera, telles qu'on ait :

$$u_n = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 :

Soit la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$.
2. En déduire que A admet trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui vérifient :

$$\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3.$$

3. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{6}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 8\right)$$

   (a) Montrer que $f(\lambda_2) = \lambda_2$.

   (b) Montrer que le segment $[1, 2]$ est stable par f (c'est-à-dire que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$).

   (c) Montrer que, pour tout λ de $[1, 2]$, $|f(\lambda) - f(\lambda_2)| \leqslant \frac{1}{3}|\lambda - \lambda_2|$.

4. Soit $x_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1, x_n = f(x_{n-1})$.

   (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers λ_2.

   (b) Donner une valeur fractionnaire simple de x_1.

   (a) En utilisant la factorisation :

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

   calculer $\lambda_1 + \lambda_3$ et $\lambda_1\lambda_3$ en fonction de λ_2.

   (b) On prend x_1 comme valeur approchée de λ_2 :
   en déduire des valeurs approchées de λ_1 et λ_3.

   (a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

   (b) Montrer que l'on peut trouver dans $\mathbb{R}^3$ une base (V_1, V_2, V_3) de vecteurs propres de A de la forme :

$$V_1 = (p(\lambda_1), \lambda_1, q(\lambda_1)), V_2 = (p(\lambda_2), \lambda_2, q(\lambda_2)), V_3 = (p(\lambda_3), \lambda_3, q(\lambda_3)),$$

   où p et q sont des polynômes qu'on déterminera

Exercice 3 :

On dispose d'un paquet de m cartes, m étant un entier supérieur ou égal à 2.
Ces cartes sont numérotées de 1 à m.
Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 franc que lui verse B à chaque partie :
B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet.
Puis A tire une carte au hasard; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme $(\beta - \alpha)$ francs : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ francs.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 franc : B a donc perdu 2 francs.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 franc, le montant de la mise.

1. On suppose dans cette question que $m = 6$.
   (a) Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β) .
   (b) Soit X la variable aléatoire représentant les gains de B. Donner la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il équilibré ou avantage-t-il l'un des joueurs ?Calculer la variance de X.

2. On revient au cas général : $m \geqslant 2$.
   (a) Etablir, en préliminaire, les formules suivantes, pour tout entier $N \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{N\,(N+1)\,(2N+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4}$$
   (b) Calculer, en fonction de m, l'espérance $E\,(X)$ de la variable aléatoire X.
   (c) Pour quelles valeurs de m l'espérance est-elle positive ?
   (d) Calculer, en fonction de m, la variance de X.

3. On observe n parties successives et on note $Y_n\,(m)$ le nombre de parties où le gain de B est strictement positif.
   Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_n\,(m)$, son espérance et sa variance en fonction de n et de m.