CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $(0;1)$, ce qui fait l'objet des trois premières parties. Une application probabiliste est proposée en quatrième partie.

Partie I

On étudie dans cette partie une méthode de calcul de l'intégrale (convergente) :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

À cet effet, on considère les fonctions f et g définies sur R par les relations :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\exp\left(-x(1+t^2)\right)}{1+t^2} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \exp\left(-x(1+t^2)\right) dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer ces deux intégrales).

1. (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Pour tout nombre réel positif x, établir l'encadrement suivant :
   $$\frac{\pi}{4}\exp(-2x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\exp(-x)$$
   (c) Établir un encadrement analogue pour x négatif.

(d) En déduire les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

2. On se propose de montrer que la fonction f est dérivable et de calculer sa dérivée.

   (a) Soit a un nombre réel positif. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout nombre réel h appartenant à $[-1;1]$:

$$|\exp(-ah) - 1 + ah| \leqslant \frac{a^2h^2}{2}\exp(a).$$

   (b) En déduire que, pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel h appartenant à $[-1;1]$:

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{2h^2}{3}\exp\left(2|1-x|\right)$$

   (c) Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée à l'aide de g.

3. On considère la fonction numérique φ définie sur R par la relation :

$$\varphi(x) = 2f\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\right)^2$$

   (a) Prouver que φ' est nulle et déterminer l'unique valeur prise par φ.

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Partie II

On étudie dans cette partie un algorithme de calcul des valeurs prises par la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite. On rappelle que :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

1. Soit x un nombre réel.

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, prouver que :

$$\sqrt{2\pi}\left(F(x) - \frac{1}{2}\right) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \int_0^x u^2\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\sqrt{2\pi}\left(F(x) - \frac{1}{2}\right) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{1\times 3} + \frac{x^4}{1\times 3\times 5} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}\right) + R_n(x)$$

   avec : $R_n(x) = \dfrac{1}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}\displaystyle\int_0^x u^{2n+2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$

2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[-2;2]$:

$$|R_n(x)| \leqslant |x|\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{5}\frac{x^2}{7}\cdots\frac{x^2}{2n+3}$$

   Trouver une valeur de n telle que, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2;2]$:

$$|R_n(x)| \leqslant 10^{-6}$$

3. On considère l'algorithme suivant, dans lequel s et x représentent des variables de type real, n et k des variables de type integer, les valeurs de x et de n étant données par ailleurs :

   $s := 1;$

   for $k := n$ downto 1 do

   $s := 1 + x * x * s/(2 * k + 1);$

   write(s);

   (a) Indiquer en fonction de x et de n l'expression finale de s.

   (b) En déduire, à l'aide des résultats obtenus dans cette partie, des valeurs approchées à 10^{-6} près de :

   $$F(0,5) \quad F(0,783) \quad F(0,784) \quad F(1) \quad F(1,5) \quad F(2)$$

   (on donnera toutes les décimales fournies par la calculatrice).

   On considère l'algorithme suivant, dans lequel S et x représentent des variables à valeurs réelles, n et k des variables à valeurs entières, les valeurs de x et de n étant données par ailleurs (l'instruction $A \leftarrow B$ signifiant que la valeur de la variable B est affectée à la variable A) :

   $S \leftarrow 1;$

   Pour k décroissant de n à 1 faire $S \leftarrow 1 + \dfrac{x^2}{2k+1} S;$

   écrire S;

4. (a) Indiquer en fonction de x et de n l'expression finale de S.

   (b) En déduire, à l'aide des résultats obtenus dans cette partie, des valeurs approchées à 10^{-6} près de :

   $$F(0,5) \qquad F(0,783) \qquad F(0,784) \qquad F(1) \qquad F(1,5) \qquad F(2)$$

   (on donnera toutes les décimales fournies par la calculatrice).

Partie III

On étudie dans cette partie le comportement asymptotique de la fonction F et de sa réciproque.

1. Montrer que la fonction F admet une fonction réciproque G, laquelle est définie sur $]0;1[$.

2. Représenter sur une même figure les courbes représentatives de F et de G (unité graphique 4 cm).

   On précisera notamment les valeurs de $F(0)$ et de $G(0,5)$, les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$, les limites de G en 0 et en 1.

3. (a) Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$. En déduire l'expression de $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$ pour $0 < y < 1$.

   (b) Pour tout nombre réel strictement négatif x, établir l'encadrement suivant :

   $$-\frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leqslant F(x) \leqslant -\frac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}$$

   En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $-\infty$, puis de $1 - F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   (c) On pose $x = G(y)$, où $x < 0$ et $0 < y < \dfrac{1}{2}$. Montrer que :

   $$-\frac{G^2(y)}{2} - \ln|G(y)| - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{G^2(y)}\right) \leqslant \ln(y) \leqslant -\frac{G^2(y)}{2} - \ln|G(y)| - \frac{\ln(2\pi)}{2}$$

   En déduire un équivalent de $G(y)$ quand y tend vers 0, puis quand y tend vers 1.

Partie IV

À l'issue d'un scrutin uninominal permettant à plusieurs centaines de milliers d'électeurs de départager deux candidats A et B d'importances comparables, on se propose, avant le dépouillement, de procéder à une estimation de la proportion p des voix obtenues par le candidat A.
À cet effet, on répète n fois ($n \geqslant 1$) l'expérience suivante : on retire "au hasard" un bulletin des urnes ; on note s'il est ou non en faveur de A et on le remet dans les urnes. On note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre des suffrages favorables à A parmi les n bulletins dépouillés ; le quotient :

$$Y_n = \frac{X_n}{n}$$

indique donc la proportion des suffrages favorables à A parmi ces n bulletins. On pose enfin :

$$u_n = P\left(|Y_n - p| > 0,01\right).$$

Soit ϵ un nombre réel appartenant à $]0;1[$. L'objectif est de déterminer le nombre n de bulletins qu'il suffit de dépouiller ainsi pour que $u_n \leqslant \epsilon$, c'est à dire pour connaitre p à $0,01$ près avec un risque d'erreur inférieur à ϵ.

1. On étudie dans cette question les lois de X_n et de Y_n .

   (a) Déterminer la loi de X_n . Calculer les espérances et les variances de X_n et de Y_n.

   (b) Montrer que :
   $$V(X_n) \leqslant \frac{n}{4}$$

2. *Première majoration de* u_n

   (a) En appliquant à X_n l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et en utilisant le résultat de la question 1.b., donner un majorant M_n de u_n ne dépendant que de n.

   (b) Comment suffit-il de choisir n pour que $M_n \leqslant \epsilon$?

   Examiner les cas où $\epsilon = 0,1$ et $\epsilon = 0,05$.

3. *Seconde majoration de* u_n

   (a) En approchant X_n par la loi normale (on justifiera la mise en œ uvre d'une telle approximation), exprimer u_n en fonction de n et de p à l'aide de F. En utilisant le résultat de la question 1.b., donner un majorant m_n de u_n ne dépendant que de n.

   (b) En déduire que $m_n \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant 2500G^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$.
   Examiner les cas où $\epsilon = 0,1$ et $\epsilon = 0,05$.
   (On rappelle les valeurs approchées suivantes : $F(1,96) \approx 0,975$ et $F(1,64) \approx 0,950$)

   (c) Soit $n(\epsilon)$ le plus petit des nombres entiers naturels n tels que $m_n \leqslant \epsilon$. Déterminer un équivalent de $n(\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0.