CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit n un nombre entier naturel . On note E_n,l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
Soit u l'endomorphisme de E_n,qui à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par la relation :

$$Q(x) = P(x-1) + P(x).$$

1. (a) Prouver que si P est un élément non nul de E_n le degré de Q est égal a celui de P.
   (b) En déduire que u est un automorphisme de E_n.

2. (a) Montrer qu'il existe un élément P_n de E_n et un seul tel que

$$(1) \qquad P_n(x-1) + P_n(x) = 2x^n.$$

   (b) En dérivant l'équation (1), montrer que si $n \neq 0$, $\quad P_n' = nP_{n-1}$.
   (c) Calculer P_0, P_1, P_2, et P_3.

3. (a) Écrire la relation satisfaite par le polynôme $Q_n(x) = P_n(-x-1)$.
   (b) En déduire que : $P_n(-x-1) = (-1)^n P_n(x)$
   (c) Soit C_n la courbe représentative de P_n . Trouver les éléments de symétrie de C_n suivant la parité de n.

4. (a) Prouver que si n est pair et non nul, $P_n(0) = P_n(-1) = 0$.
   (b) Montrer que si n est impair, $P_n(-1/2) = 0$.

5. Construire les courbes les courbes C_2, et C_3.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par la relation :

$$f(x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. (a) Étudier la parité de f et prouver que f se prolonge en une fonction continue g sur $[-1;1]$.
   (b) Calculer la dérivée de f ; étudier la dérivabilité de g aux bornes de l'intervalle.
2. Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par la relation $h(t) = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - t$.
   (a) Étudier la variation de h.
   (b) Prouver que h s'annule en un point α et un seul, et que $1,5 \leqslant \alpha \leqslant 1,6$.
3. (a) Étudier le signe de f'.
   (b) Dresser le tableau de variation de g et construire la courbe représentative C de g .
   Exprimer en fonction de α les coordonnée des points de C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Calculer $\int_0^1 g(x)dx$.

EXERCICE 3

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs réelles, continues sur l'intervalle $[-1;1]$ et telles que $f(-1) = f(1) = 0$.
On note $M(f)$ le maximum de $|f|$ sur $[-1;1]$ et on pose :

$$I(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt.$$

Soit enfin B la partie de E constituée des fonctions f de classe C^1 sur les intervalles $[-1;0]$ et $[0;1]$ et telles que, pour tout élément non nul t de $[-1;1]$, $\quad |f'(t)| \leqslant 1$.

1. Soit φ la fonction définie sur $[-1;1]$ par la relation $\varphi(t) = 1-|t|$.
   Prouver que φ appartient à B et construire sa courbe représentative.
2. Soit f un élément de B.Prouver que, pour tout point t de $[-1;1]$, $\quad |f(t)| \leqslant \varphi(t)$
   (On pourra se placer d'abord sur $[0;1]$, puis sur $[-1;0]$.
3. Prouver que, pour tout élément f de B, $I(f) \leqslant 1$; déterminer les éléments f de B tels que $I(f) = l$.
4. (a) Prouver que, pour tout élément f de B, $M(f) \leqslant 1$.
   (b) Soit ψ un élément de B tel que $M(\psi) = 1$.À l'aide de la question 2,montrer que $|\psi(0)| = 1$.
   Lorsque $\psi(0) = 1$, prouver que $\psi = \varphi$. (On utilisera la méthode indiquée dans la question 2.)
   (c) Déterminer les éléments f de B tels que $M(f) = 1$.

EXERCICE 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega; A; P)$.On suppose que X est une variable de Poisson de paramètre λ et Y une variable de Poisson de paramètre μ , où λ et μ sont strictement positifs. Pour tout nombre entier naturel n, on notera

$$p_n = P(X = n) \quad \text{et} \quad q_n = P(Y = n)$$

1. Montrer que la variable $Z = X + Y$ est une variable de Poisson dont on déterminera le paramètre.
   Trouver l'espérance et la variance de Z.
2. Soit k un nombre entier naturel. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z = k$.
3. On pose $U = X - Y$.
   (a) Trouver l'espérance et la variance de U.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre U. La variable U est-elle une variable de Poisson ?
   (c) Trouver la loi conditionnelle de U sachant que $Z = k$, où $k \in N$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2).