CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME N° 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$, $\overrightarrow{B}$ dont on donne les coordonnées dans la base canonique de E.

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 400 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 24 \\ 300 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Question 1 :

Soit E' le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$. Déterminer la dimension de E'. Que peut-on dire de l'existence et du nombre de solutions du système (écrit sous forme vectorielle) :

$$\overrightarrow{A_1}x_1 + \overrightarrow{A_2}x_2 + \overrightarrow{A_3}x_3 = \overrightarrow{B} \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Question 2 :

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 400x_1 + 24x_2 - 8x_3 = 30 \\ 9x_1 + 300x_2 - 15x_3 = 60 \\ 4x_1 - 8x_2 + 400x_3 = 50 \end{cases}$$

On donner les résultats numériques à 10^{-4} près.

Question 3 :

On dit qu'une suite de matrices colonnes à trois lignes à coefficients réels de terme général $X_n = (x_i^{(n)})$, tend, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice colonne à trois lignes $X = (x_i)$ si quel que soit l'indice i la suite réelle $(x_i^{(n)})$ converge vers x_i.

a. Résultats préliminaires :
On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \text{système (1)}$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nous supposerons dans ce qui que les coefficients diagonaux de la matrice A ne sont pas nuls :

$$a_{ii} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

En résolvant la première équation du système (1) par rapport à x_1, la seconde équation par rapport à x_2 et la troisième équation par rapport à x_3, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{cases} \qquad \text{système (2)}$$

Soit encore matriciellement :

$$X = \beta + \alpha X \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Posons $X_0 = \beta$ et construisons la suite :

$$(X_0, X_1, X_2, ..., X_n, ...)$$

définie par $X_n = \beta + \alpha X_{n-1}$.
Montrer que si la suite $(X_0, X_1, X_2, .., X_n, ...)$ possède une limite notée X, alors cette limite est une solution du système (2) et par conséquent du système (1).
Nous admettrons, pour la suite du problème, l'existence de la limite X.

b. Résolution d'un système d'équations linéaires par approximation successives :
En utilisant le résultat que la question 3.a), déterminer une solution approchée du système d'équations :

$$\begin{cases} 400x_1 + 24x_2 - 8x_3 = 30 \\ 9x_1 + 300x_2 - 15x_3 = 60 \\ 4x_1 - 8x_2 + 400x_3 = 50 \end{cases}$$

On se contentera d'expliciter une solution approchée du système donnée par le 3$^{\text{ème}}$ terme X_2 de la suite (X_n) (on donnera les résultats avec quatre décimales).

PROBLEME N° 2

Désignons par P la population des français et notons p la proportion d'individus de P possédant une automobile. Désignons par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des échantillons de taille n, issus de la population P, que l'on peut obtenir par sondages aléatoires (nous supposerons que les n individus sont tirés au hasard l'un après l'autre, chaque individu étant remis dans la population avec le tirage de l'individu suivant); notions F_n la variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ qui à tout échantillon de taille n fait correspondre la proportion f_n d'individus de l'échantillon qui possèdent une automobile.

Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, soit X_i le variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ telle que, étant donné un échantillon $E_n \in \mathcal{E}_n$:

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ individu de } E_n \text{ possède une automobile} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 1 :

a. Exprimer la variable aléatoire F_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$.

b. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire nF_n (on justifiera avec précision le résultat).

c. Calculer $E(F_n)$ (espérance mathématique de F_n)
$V(F_n) = Var(F_n)$ (variance de F_n).

d. Dans le cas où $n = 64$ et où l'on sait que p est tel que : $40\ \% \leqslant p \leqslant 60\ \%$, par quelle loi de probabilité peut-on approximer la distribution de la variable aléatoire nF_n (on exprimera en fonction de n et p le ou les paramètres de cette loi).

Question 2 :

a. En se plaçant sous les hypothèses de la question 1.d), déterminer $t > 0$ tel que :

$$P\left(-t \leqslant \frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} \leqslant t\right) = 0,95$$

b. Soit E_n un échantillon de taille $n = 64$ sur lequel on a mesuré $f_n = 0,45$; en tenant compte de cette observation, déterminer un intervalle $[p_1, p_2]$ tel que :

$$P(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 0,95$$

EXERCICE

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x^4 - 5x^3 - 3x - 11}{x^3 - 1} dx$$

Insérer une table de loi normale