

Concours National d'admission 1990

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

EXERCICE I

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

θ désigne l'endomorphisme nul, $\circ$ la loi de composition des applications, f^n la composée de n applications égales à f et par convention, f^0 l'identité de $\mathbb{R}^3$.

Soient f et Id les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrices respectives M et I dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- I. 1° Déterminer par la méthode du pivot de Gauss la matrice M^{-1} .
 2° Trouver la dimension et une base du noyau et de l'image de $f - \text{Id}$.
 3° Trouver la dimension et une base du noyau et de l'image de $f - 2\text{Id}$.

II. Soient $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 0, 1)$

- 1° Montrer que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 2° Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
 3° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\text{Id}$.

III. Pour tout réel t , soit $g_t = (e^{2t} - e^t)f + (2e^t - e^{2t})\text{Id}$.

- 1° Démontrer les égalités suivantes :

$$(f - \text{Id})^2 = f - \text{Id}; \quad (2\text{Id} - f)^2 = (2\text{Id} - f); \quad (f - \text{Id}) \circ (2\text{Id} - f) = (2\text{Id} - f) \circ (f - \text{Id}) = \theta$$

- 2° a) Démontrer que : $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, g_s \circ g_t = g_{s+t}$
 b) Prouver que g_t est bijectif et déterminer g_t^{-1} .
 c) Pour n élément de $\mathbb{N}$, déterminer g_t^n .

PROBLEME

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} \ln x$. Soit C la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\|\vec{i}\| = 5 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$.

Soit U la suite de terme général u_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, u_n = -\ln n + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

- I. 1° a) Etudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1 - x \ln x$.
 b) Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
 Déterminer l'entier n_0 tel que $\frac{n_0}{1000} \leq \alpha < \frac{n_0 + 1}{1000}$.

c) Préciser le signe de $\varphi(x)$.

2° a) Utiliser le signe de φ pour déterminer le sens de variation de f .

b) Déterminer les limites de f en zéro et en $+\infty$. Préciser les branches infinies de C .

c) Construire C .

II. 1° Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$. (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

2° Démontrer que la suite U est bornée.

3° Etablir que la suite U est convergente.

4° Déterminer une valeur approchée de u_2, u_{10}, u_{100} . On donnera les six premières décimales fournies par la calculatrice.

III. 1° Montrer que pour tout réel $x, 1+x \leq e^x$.

En déduire que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall t \in [0, n] \quad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n &\leq e^t \\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall t \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\leq e^{-t} \end{aligned}$$

2° Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x élément de $[0, 1]$,

$$(1-x)^n + nx - 1 \geq 0$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 1 - \frac{t^2}{n} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$

3° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall t \in [0, n], \quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$.

IV. Pour n éléments de $\mathbb{N}^\times$, soient $J_n = \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} dt$ et $K_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt$.

1° Justifier l'existence de K_n .

Démontrer la convergence de l'intégrale J_n .

2° a) Montrer que $J_n + K_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} dt + \int_1^n \frac{dt}{t}$.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{p=0}^{n-1} (1-x)^p$$

3° Soit $J = \int_0^1 f(t) dt$.

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge.

b) Vérifier que :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], \quad \int_{\varepsilon}^1 f(t) dt = (e^{-\varepsilon} - 1) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt.$$

En déduire que $J = \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$.

4° Soit $K = \int_1^{+\infty} f(t)dt$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 1, \quad \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$.

En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

b) Montrer que pour tout réel x supérieur à 1, $\int_1^x f(t)dt = -e^{-x} \ln x + \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

En déduire que $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

V. 1° En utilisant les résultats du III. démontrer :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 &\leq J - J_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 te^{-t} dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 &\leq \int_0^n \frac{e^{-t}}{t} dt - K_n \leq \frac{1}{n} \int_1^n te^{-t} dt \end{aligned}$$

2° a) Calculer $\int_1^n te^{-t} dt$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = J$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = K$.

3° En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ en fonction de la limite de U .