

Concours National d'admission 1990

MATHEMATIQUES II

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé

On considère l'espace vectoriel E des suites de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (que l'on notera plus simplement : (u_n)) muni des opérations habituelles.

Le but du problème est l'étude certains endomorphismes de E et de leur application à un problème de prévision. Etant donné les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ ($l \in \mathbb{N}^\times$) on appelle moyenne mobile de coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ l'application M qui, à la suite de terme général u_n , associe la suite de terme général :

$$\alpha_0 u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \dots + \alpha_{l-1} u_{n+l-1} = \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_k u_{n+k}$$

On notera : $M = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}]$ cette application.

Dans le cas où la moyenne mobile n'a pas que des coefficients nuls, α_{l-1} est le dernier coefficient non nul de la moyenne mobile et on dit alors que l est sa longueur. On notera $l = l(M)$.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des moyennes mobiles (y compris la moyenne mobile nulle, dont tous les coefficients sont nuls et qui n'a pas de longueur).

On écrira simplement (Mu_n) pour désigner l'image par M de la suite (u_n) .

Par exemple, si M est la moyenne mobile $[1; 1]$ de longueur 2 et si (u_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \quad \text{on a} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Mu_n = 0$$

I. *Un exemple concret :*

On considère la suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n + (-1)^n$.

Ecrire les 6 premiers termes de (u_n) .

Soit M la moyenne mobile $[-1; -1; 1; 1]$ de longueur 4

Ecrire les 6 premiers termes de (Mu_n) .

II. *Quelques propriétés :*

- 1° a) Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel L et $M = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}]$. Montrer que (Mu_n) converge et déterminer sa limite.
- b) Réciproquement, peut-on trouver une moyenne mobile M et une suite (u_n) ne convergeant pas telles que (Mu_n) converge ?
- c) Etant donné une moyenne mobile M de longueur 3, existe-t-il une suite (u_n) ne convergeant pas telle que (Mu_n) converge ?
- 2° a) Montrer qu'une moyenne mobile est un endomorphisme de E .
- b) Montrer que si M et N sont deux moyennes mobiles et λ et μ deux réels alors $\lambda M + \mu N$ est une moyenne mobile et, si M, N et $\lambda M + \mu N$ ont une longueur :

$$l(\lambda M + \mu N) \leq \max(l(M), l(N))$$

III. *Recherche d'une moyenne mobile particulière :*

- 1° a) On considère l'ensemble P des suites (a_n) de E telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+4} = a_n$.
Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E .

- b) Déterminer une base de P et donner sa dimension.
 c) Si $M = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ comparer les deux réels

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_{n+2} + \alpha_3 a_{n+3} \quad \text{et} \quad \alpha_0 a_{n+4} + \alpha_1 a_{n+5} + \alpha_2 a_{n+6} + \alpha_3 a_{n+7}$$

où $(a_n) \in P$

(Ma_n) est-elle un élément de P ?

- d) On note $J = [1; 1.1.1]$. Etablir que si $(a_n) \in P$ alors (Ja_n) est constante.
 e) On désigne par $\ker(J)$ le noyau de l'endomorphisme J de E .

Déterminer $P_0 = P \cap \ker(J)$

Montrer que $P = K \oplus P_0$ où K désigne le sous-espace vectoriel de E formé par les suites constantes.

- 2° a) A tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe la suite (q_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = Q(n)$.

Soit $\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow E$

$$Q \mapsto (q_n)$$

Montrer que ϕ est une application linéaire. Est-elle injective ?

- b) En utilisant $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$, montrer que :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (l-1)\alpha_{l-1} = 7 \\ \alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \dots + (l-1)^2\alpha_{l-1} = 49 \end{cases}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que $M = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}]$ vérifie :

$$\forall (x_n) \in \text{Im}(\phi) \quad (Mx_n) = (x_{n+7})$$

où $\text{Im}(\phi)$ désigne l'ensemble image par ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est-à-dire $\phi(\mathbb{R}_2[X])$

- c) Déterminer $P \cap \text{Im}(\phi)$ et en donner une base.
 d) En déduire une base de $P_0 \oplus \text{Im}(\phi)$

- 3° Etablir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une moyenne mobile $F = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6]$ de longueur 7 vérifie :

$$\forall (x_n) \in 0, \quad (Fx_n) = (\alpha_{n+7})$$

est :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_6 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

- 4° Utiliser les résultats précédents pour trouver les moyennes mobiles F de longueur 7 telles que :

$$\begin{cases} \forall (x_n) \in P, & (Fx_n) = (x_{n+7}) \\ \forall (x_n) \in \text{Im}(\phi) & (Fx_n) = (x_{n+7}) \end{cases}$$

On exprimera tous les coefficients de F en fonction de $\alpha_0 = \alpha$ et l'on notera F_α une telle moyenne mobile.

IV. Application à un problème de prévision :

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres 0 et σ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^\times$)

Soit (a_n) une suite de $P_0 \oplus \text{Im}(\phi)$. On pose $X_n = a_n + \varepsilon_n$ et $F_\alpha X_n = \sum_{i=0}^6 \alpha_i X_{i+n}$

- 1° Montrer que $(F_\alpha X_n)$ est une suite de variables aléatoires dont on précisera l'espérance et dont on montrera que la variance commune notée $(\sigma_\alpha)^2$ est $(12\alpha^2 - 16\alpha + 11)\sigma^2$.
 2° Etablir que σ_α^2 passe par un minimum unique pour une valeur β de α que l'on déterminera.
 On admettra que $F_\beta X_n - X_{n+7}$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

V. *Etude d'un exemple :*

Le relevé trimestriel des ventes d'une succursale d'une grande marque automobile donne le tableau suivant :

Année → Trimestre ↓	1986	1987	1988	1989	1990
1	$x_0 = 130$	$x_4 = 144$	$x_8 = 162$	$x_{12} = 183$	$x_{16} = 209$
2	$x_1 = 148$	$x_5 = 163$	$x_9 = 182$	$x_{13} = 204$	
3	$x_2 = 131$	$x_6 = 148$	$x_{10} = 167$	$x_{14} = 190$	
4	$x_3 = 170$	$x_7 = 187$	$x_{11} = 208$	$x_{15} = 232$	

1° Tracer sur une feuille de papier millimétré la suite $(x_n)_{0 \leq n \leq 6}$

(n en abscisses, unité 1 cm; x_n en ordonnées : unité 2 mm)

On note G la moyenne mobile $\left[\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; 1; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Soit $y_n = Gx_n$ et (z_n) la suite telle que $z_{n+7} = y_n$.

Tracer la suite (z_n) sur le même graphique.

2° On veut vérifier que $z_n - x_n$ suit une loi normale.

Pour cela, on classe les différentes valeurs de $z_n - x_n$ par ordre croissant : $V_1 < V_2 < \dots < V_p$ et l'on considère les classes $]-\infty, V_1]$, $]V_1, V_2]$, $]V_2, V_3]$, ..., $]V_{p-1}, V_p]$ dont on détermine les effectifs.

Tracer alors la droite de Henry.

3° On suppose que la suite (x_n) est élément de $P_0 \oplus \text{Im}(\phi)$ montrer que l'espérance mathématique du nombre de voitures vendues au second trimestre 1990 est égale à $\frac{694}{3}$.

VI. *Application :*

On suppose que le nombre de voitures vendues dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$) et que les ventes des journées successives sont indépendantes. Sachant qu'il sera travaillé 68 jours au cours du second trimestre 1990, déterminer λ puis, à l'aide de la table jointe au sujet, fixer les nombres de voitures n_1 et n_2 tels que :

$$\text{Ent}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) = \text{Ent}(E(x_{17})) \quad P(x_{17} \notin]n_1, n_2]) \leq 0,05$$

où $E(x_{17})$ désigne l'espérance mathématique de x_{17} et $\text{Ent}(p)$ représente la partie entière du réel p .