Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale prime et économique

Concours National d'admission 1990

MATHEMATIQUES II

Statistiques et probabilités

EXERCICE

Le tableau suivant donne, pour les années de 1979 à 1988, le nombre de clients d'une agence de voyages ayant retenu un séjour en période d'hiver.

année	n° de l'année x_i	nombre de centaines de clients y_i
1979	1	172
1980	2	204
1981	3	232
1982	4	245
1983	5	273
1984	6	291
1985	7	287
1986	8	318
1987	9	325
1988	10	332

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ sur la feuille de papier logarithmique jointe au sujet. Que peut-on en conclure ?

2. On pose $u_i = \log x_i$ et $v_i = \log y_i$, où log désigne le logarithme décimal.

   (a) Compléter le tableau des calculs joint au sujet qui sera remis avec la copie.
   N.B. u_i et v_i seront arrondis à 0,0001 près au plus proche. Tous les autres nombres du tableau seront calculés à partir de ces valeurs arrondies et eux-mêmes arrondis à 0,0001 près au plus proche. Dans la suite, les coefficients demandés seront calculés à partir de ces valeurs.

   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre u et v.
   N.B. Ce coefficient sera arrondi à 0,0001 près au plus proche.

   (c) Déterminer l'équation $v = au + b$ de la droite de régression de v en u.
   N.B. Les coefficients a et b seront arrondis à 0,001 près au plus proche
   Tracer cette droite sur le graphique du 1., en précisant deux de ses points.

   (d) En déduire sous la forme $y = kx^{\alpha}$ la relation entre x et y.
   N.B. Le coefficient k sera arrondi à l'entier le plus proche et le coefficient α sera arrondi à 0,001 près au plus proche

PROBLEME

Les questions de ce problème sont dans une large mesure indépendantes. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 0,001 près.

1^{re} PARTIE

Une agence de voyages propose à sa clientèle les deux formules suivantes :

- la formule hôtel, notée H (le forfait comprend le transport et l'hébergement)
- la formule club, notée C (le forfait comprend le transport, la pension et l'animation)

30 % des clients de l'agence choisissent la formule H et 70 % la formule C.
Pour sa gestion interne, l'agence distingue les voyages effectués en France et ceux effectués à l'étranger. Parmi les clients ayant choisi la formule H, 80 % effectuent leur voyage en France et 20 % à l'étranger et parmi ceux qui ont choisi la formule C, 40 % effectuent leur voyage en France et 60 % à l'étranger.
Les clients choisissent leur voyage indépendamment les uns des autres.

1. Un client se présente à l'agence.
   (a) Calculer la probabilité qu'il choisisse un voyage à l'étranger en formule C
   (b) Calculer la probabilité qu'il choisisse un voyage à l'étranger.
   (c) Il demande un voyage à l'étranger. Calculer la probabilité pour qu'il opte pour la formule C.

2. Deux clients se présentent à l'agence.
   Le nombre de ces deux clients choisissant la formule C définit une variable aléatoire X et le nombre de ces deux clients choisissant un voyage à l'étranger définit une variable aléatoire Y.
   (a) Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y).
   (b) Calculer la probabilité pour que l'un au moins de ces clients choisisse un voyage à l'étranger en formule C.
   (c) Calculer la covariance du couple (X, Y).
   (d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. La probabilité qu'un client se rendant à l'étranger réserve une voiture de location pour la durée de son séjour est r $(0 < r < 1)$
   Sur 8 clients se rendant à l'étranger, 3 ont choisi le formule H et 5 la formule C.
   On désigne respectivement par U et V les variables aléatoires définies par le nombre de clients ayant réservé une voiture de location dans la formule H et dans la formule C.
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement $[V = 3]$ sachant que $[U + V = 5]$. Vérifier qu'elle ne dépend pas de r.
   (b) Définir la loi de V sachant $[U + V = 5]$. On précisera les valeurs prises par V et les probabilités correspondantes.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de V sachant $[U + V = 5]$
   N.B. Dans cette question, les probabilités seront données sous forme de fractions.

2^{e} PARTIE

Le forfait du voyage, en milliers de francs, versé à l'agence par un client définit une variable aléatoire M. Des études antérieures ont permis d'établir que :

$$M = 2 + 0,5Z$$

où Z est une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par :

$$F(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ = 1 - e^{-z/6}(\frac{z}{6} + 1) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

(a) $[M \leqslant 8]$

(b) $[M > 20 / M > 14]$

2. On considère les forfaits de 4 clients de l'agence.
Calculer la probabilité que ces quatre forfaits soient, tous les quatre, supérieurs à 10 000 F.

3. (a) Déterminer une densité f de probabilité de Z.

   (b) Calculer $E(Z)$. En déduire $E(M)$

4. Définit la fonction de répartition G et une densité de probabilité g de M.

5. On prélève, au hasard, 100 dossiers dans l'ensemble des dossiers de voyage des clients de l'agence.
Soit N la variable aléatoire définie par le nombre de dossiers, sur les 100, dont le forfait est supérieur à 17 000 F.

   (a) Définir la loi de N.

   (b) Montrer que l'on peut faire une approximation de N par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre λ.
   N.B. La valeur de λ sera arrondie à l'entier le plus proche.

   (c) A l'aide de cette approximation, calculer la probabilité de l'évènement $[3 \leqslant N \leqslant 8]$

3^e PARTIE

Une organisation professionnelle réunit son congrès annuel dans une ville située à l'étranger. Les 500 personnes inscrites se rendront à Paris, d'où elles rejoindront, par avion, le lieu du congrès. L'agence est chargée de l'organisation du transport.
Deux avions sont prévus au départ de Paris à 2 heures d'intervalles.
On admet que les congressistes choisissent au hasard et indépendamment les uns des autres l'un des deux avions.
Soit K la variable aléatoire définie par le nombre de congressistes choisissant le premier avion.

1. (a) Définir la loi de K.

   (b) Montrer que la loi de K peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
   N.B. Le paramètre σ sera arrondi à 0,01 près.
   A l'aide de cette approximation, répondre aux questions suivantes .
   N.B. Les valeurs de cette variable aléatoire qui suit la loi normale centrée et réduite seront arrondies à 0,01 près au plus proche.

2. Si 270 places sont prévues dans le premier avion et 268 places dans le deuxième :

   (a) Calculer la probabilité qu'il manque des places dans le premier avion.

   (b) Calculer la probabilité qu'il manque des places dans l'un ou l'autre avion.

3. L'agence prévoit de réserver pour les congressistes le même nombre de places dans chaque avion.
Déterminer le nombre minimum n_0 de places à prévoir dans chaque avion pour que la probabilité qu'il manque des places dans l'un ou l'autre avion soit inférieure à 0,005