

Concours National d'admission 1989

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

EXERCICE

Soient f et id les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives M et I dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. 1° a) Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

b) Calculer M^2 et M^3 .

c) En déduire que $M^4 = I$

2° Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice M^n en fonction de I , M , M^2 , M^3 .

3° Montrer que $M - I$ est régulière. En déduire la relation $M^3 + M^2 + M + I = 0$

II. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$

1° a) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que si $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

2° Déterminer les sous-espaces vectoriels E_λ non réduits au vecteur nul. Préciser leur dimension. En donner une base.

III. Soit E l'ensemble des suite réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

1° Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M X_n$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$

c) Déterminer u_n en fonction de n , u_0 , u_1 et u_2 .

3° Démontrer qu'il existe trois éléments $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I$$

PROBLEME

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10$ cm.

Pour tout entier naturel n strictement positif, soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n e^{n(1-x)}$
 C_n désigne la représentation graphique de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- I. 1° Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad xe^{-x+1} - 1 \leq 0$
 2° En déduire la position relative des courbes C_n et C_{n+1} .
 3° Déterminer les points communs à toutes les courbes C_n .
- II. 1° Etudier le sens de variation de f_n . On distinguera les cas $n = 1$, et pour $n > 1$, n pair et n impair.
 2° Déterminer la nature des branches infinies de C_n .
 3° Déterminer les points de C_n d'abscisse non nulle en lesquels la tangente passe par l'origine O des axes.
- III. 1° Etudier la concavité et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_n .
 2° Pour $n > 1$, soit $P_n(x_n, u_n)$ et $Q_n(y_n, v_n)$ les points d'inflexion de C_n d'abscisses strictement positives ($x_n < y_n$).
 a) Calculer $w_n = \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
 b) Déterminer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de zéro de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
 c) Déterminer la limite de w_n , puis de $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- IV. 1° Construire C_1, C_2, C_3 .
 2° Soit $D = \{M(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f_3(x) \leq y \leq f_2(x)\}$
 Déterminer en cm^2 l'aire du domaine D .
 En donner une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche.

V. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, soit :

$$F_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f_n(t) dt \end{array} \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

- 1° a) Justifier l'existence de $F_n(x)$ pour tout réel x .
 Montrer que F_n est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F_1(x)$.
 b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_n(x) \leq F_1(x)$$

 c) Démontrer que $F_n(x) = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^{nx} t^n e^{-t} dt$
- 2° a) Montrer que l'intégrale I_1 est convergente.
 b) En déduire que les intégrales I_n et J_n sont convergentes.
- 3° a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad J_{n+1} = (n+1)J_n$$

 b) En déduire la valeur de J_n puis la valeur de I_n .
- 4° a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est convergente.
 b) Donner une valeur approchée de $I_{10}, I_{20}, I_{100}, I_{650}$.
 En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$.