

Concours National d'admission 1989

MATHEMATIQUES II

On rappelle que $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé

I. 1° Soit x un nombre réel fixé.

a) Rappeler la valeur de : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t}$

En déduire :

α) Qu'il existe un réel A strictement positif (que l'on ne demande pas de calculer) tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t \geq A \Rightarrow t^{x+1} e^{-t} \leq 1)$$

β) Que $\int_A^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.

b) Etudier suivant les valeurs de x la convergence de $\int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt$.

c) En déduire que la fonction gamma d'EULER : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, est définie pour $x > 0$.

2° a) Calculer $\Gamma(1)$

b) Etablir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$

c) Démontrer que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ et en déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)} \sqrt{\pi}$.

3° a) On note : $P(x) = ax^2 + bx + c$

Déterminer (a, b, c) pour que : $P(3) = \Gamma(3), \quad P\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right), \quad P(4) = \Gamma(4)$

On admettra que P approche Γ sur $[3, 4]$.

b) Exprimer, pour $x \in [1, 2]$, $\Gamma(x)$ en fonction de $\Gamma(x+2)$

c) En déduire une approximation de $\Gamma(x)$ à l'aide de P pour $x \in [1, 2]$ puis une valeur approchée de $\Gamma(1, 8)$ à 10^{-4} près.

II. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ suit une loi de WEIBULL de paramètres a et b (éléments de $\mathbb{R}_+^\times$) et l'on note :

$$X \hookrightarrow W(a, b) \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(X \leq t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{b} \right)^a \right]$$

(exp désigne la fonction exponentielle, $\exp(x) = e^x$)

A) dans cette partie, on étudie $X \hookrightarrow W(1, b)$;

1° Quelle est la loi classique suivie par X ?

2° Rappeler les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X .

3° Calculer le moment centré d'ordre trois de X (espérance de $[X - E(X)]^3$)

4° Soient s et t deux réels strictement positifs.

Calculer : $P(X \geq s + t/X \geq t)$ et reconnaître la probabilité d'un événement simple.

5° Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi $W(1, b)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de : $X_{(1)} = \max(X_1, X_2)$.

(pour $\omega \in \Omega$, $X_{(1)}(\omega)$ désigne le plus grand des deux réels $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$)

b) On note $X_{(2)} = \min(X_1, X_2)$

(pour $\omega \in \Omega$, $X_{(1)}(\omega)$ désigne le plus petit des deux réels $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$)

Démontrer que $X_{(2)}$ suit $W(1, \frac{b}{2})$

6° Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables indépendantes de même loi $W(1, b)$.

a) Montrer que $X_{(n)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suit $W(1, \frac{b}{n})$

b) Pour chaque $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre décroissant et on note $X_{(k)}(\omega)$ le $k^{ième}$ de ces nombres.

Déterminer la fonction de répartition de $X_{(k)}$.

B) On suppose maintenant que X suit $W(a, b)$.

1° Comparer selon les valeurs de a : $P(X \geq s + t/X \geq t)$ à $P(X \geq s)$.

Rapprocher ce résultat de celui de II. A) 4°

2° Montrer que :

a) $E(X) = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$

b) $V(X) = b^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^2 \right]$

III. On considère un équipement complexe, c'est-à-dire constitué d'un grand nombre de composants tels que la panne d'un seul d'entre eux provoque la panne de l'ensemble. Une unité centrale d'ordinateur (notée UC) est un exemple d'un tel système.

On suppose que les n composants ont des durées de vie (temps de fonctionnement avant la 1^{re} panne) $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes suivant la même loi $W(a, b)$

1° Exprimer la durée de vie T de l'équipement en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$ et montrer qu'elle suit une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres.

2° Quelle est la loi de T si $a = 1$?

IV. Le relevé des durées de fonctionnement (en heure) avant la 1^{er} panne de 250 UC a donné les résultats suivants :

i	Classes $]t_{i-1}, t_i]$ t_i : limites des classes (en heures)	Effectifs n_i n_i : effectifs des classes
1	$]0; 16\ 000]$	15
2	$]16\ 000; 20\ 000]$	14
3	$]20\ 000; 25\ 000]$	25
4	$]25\ 000; 28\ 000]$	19
5	$]28\ 000; 32\ 000]$	27
6	$]32\ 000; 36\ 000]$	29
7	$]36\ 000; 42\ 000]$	42
8	$]42\ 000; 45\ 000]$	19
9	$]45\ 000; 50\ 000]$	25
10	$]50\ 000; 60\ 000]$	26
11	$]60\ 000; +\infty[$	9

On note, pour i entier ($1 \leq i \leq 10$), F_i la fréquence cumulée de la classe $]t_{i-1}, t_i]$ et $f_i = -\ln(1 - F_i)$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien)

- 1° Donner la liste des valeurs approchées à 10^{-3} près des f_i pour $1 \leq i \leq 10$.
- 2° Représenter le nuage des 10 points $M_i(t_i, f_i)$ sur la feuille jointe au sujet.
- 3° En déduire que la durée de vie T suit une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres en s'aidant du graphique.
(On lira les coordonnées des points sur la droite d'ajustement tracée correspondant à $t=10\ 000$ et à $t=80\ 000$. Les coefficients d'une équation de la droite seront donnés à 10^{-2} près).

V. On admet désormais que la durée de vie T d'une UC suit $W(3; 40\ 000)$.

- 1° Déduire du I.3° et du II. B) 2° une valeur approchée (à une heure près) de l'espérance mathématique de T (espérance du temps avant la première panne, notée MTBF)
- 2° L'UC est formée de 200 composants dont la durée de vie suit $W(a, b)$.
Quelles sont, à une unité près, les valeurs de a et b ?
- 3° Au bout de 2 000 heures, l'ensemble tombe en panne et l'on procède au remplacement du seul composant défectueux.
Quelle est la loi du temps de bon fonctionnement avant la prochaine panne ?