

Concours National d'admission 1989

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé

On rappelle que la notation $o(x^n)$ désigne une fonction négligeable devant x^n (au voisinage du point considéré). Pour x réel, on pose :

$$\varphi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale

La fonction φ est connue sous le nom d'intégrale de DAWSON

1. (a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que φ est impaire. On supposera dans la suite que $x \in \mathbb{R}_+$.
2. (a) Etablir que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner une relation entre x , φ et $\varphi'(x)$.
(b) Démontrer, pour tout entier naturel n , que $\varphi^{(n)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n(x)\varphi(x) + Q_n(x)$$

($\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ : $\varphi^{(0)} = \varphi$)

- (c) Expliciter $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
 - (d) Déterminer le terme de plus haut degré de chacun des polynômes P_n et Q_n .
3. (a) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = -2\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x).$$

(b) Montrer que φ admet un développement limité à tout ordre N ($N \in \mathbb{N}$) au voisinage de zéro.
(c) Si on note : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o(x^N)$ au voisinage de zéro, calculer a_{2k} ($k \in \mathbb{N}$) et démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-4)^k}{(2k+1)!}$$

Expliciter les nombres a_j pour $j \in \mathbb{N}$, $j \leq 7$ sous forme de fractions irréductibles.

4. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad xe^{-x^2} \leq \varphi(x) \leq x$.

5. (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt$.

- (b) A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, prouver que $\int_1^x e^{t^2} dt$ est équivalente à $\frac{e^{x^2}}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.
- (c) En déduire un équivalent simple de φ en $+\infty$.
6. (a) Montrer qu'il existe au moins un élément x_0 de $\mathbb{R}_+^\times$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$. **Ne pas chercher à calculer x_0 .**
- (b) Vérifier que $M_0(x_0, \varphi(x_0))$ appartient à la courbe (H) d'équation $y = \frac{1}{2x}$.
- (c) D'une étude succincte de ψ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2x}$$

déduire la position de (Φ) (d'équation $y = \varphi(x)$) par rapport à (H) au voisinage de M_0 .

- (d) Montrer que φ présente un maximum local en x_0 .
- (e) α) En supposant que φ admette deux maximums locaux x_0 et x'_0 ($x_0 < x'_0$), établir l'existence d'au moins un minimum local en un point x''_0 tel que $x_0 < x''_0 < x'_0$.
- β) En déduire l'unicité de x_0 en lequel φ admet un maximum.
- (f) Calculer une valeur approchée de $\varphi(x)$ pour $x \in \{0, 8; 0, 9; 1\}$ à l'aide d'une calculatrice programmable. En déduire un encadrement de x_0 .
7. (a) Montrer que les points d'inflexion de (Φ) sont sur la courbe (I) d'équation : $y = \frac{x}{2x^2 - 1}$.
- (b) Calculer la limite de φ' en $+\infty$. En déduire que (Φ) admet un point d'inflexion M_1 d'abscisse x_1 supérieure à x_0 .
8. Calculer une valeur approchée de $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ à l'aide d'une calculatrice programmable.
Tracer (Φ) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité : 8 cm sur Ox , 16 cm sur Oy)
9. On considère la série de terme général $a_n x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (les a_n sont ceux définis dans la 3^e question) où x est un élément quelconque fixé de $\mathbb{R}_+^\times$.

(a) Calculer : $b_k = \left| \frac{a_{2k+3} x^{2k+3}}{a_{2k+1} x^{2k+1}} \right|$

- (b) Démontrer qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(k \geq p \Rightarrow b_k \leq \frac{1}{2} \right)$$

- (c) Etablir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(k \geq p \Rightarrow \left| a_{2k+1} x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2^{k-p}} \left| a_{2p+1} x^{2p+1} \right| \right)$$

- (d) En déduire que $\sum a_n x^n$ converge.

- (e) On suppose que $x = \frac{1}{2}$. Décrire un algorithme permettant de calculer :

$$S_{2m+1} = \sum_{n=0}^{2m+1} a_n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

où m est un élément de $\mathbb{N}$ donné.

10. (a) Montrer qu'il existe un couple unique de polynômes R et T de degrés respectifs 1 et 2 tels que $T(0) = 1$ et que, posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \gamma(x) = \frac{xR(x^2)}{T(x^2)}$$

on ait : $\varphi(x) - \gamma(x) = o(x^8)$ au voisinage de zéro.

($P(x^2)$ désigne le polynôme obtenu en substituant x^2 à X dans le polynôme $P(X)$)

- (b) Tracer alors la courbe (Γ) d'équation $t = \gamma(x)$ sur la même figure que (Φ) .