

Concours National d'admission 1988

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

L'épreuve est constitué d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$. Soient g , id et f_m les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrices respectives A , I et $M_m = mA + J$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$m \in \mathbb{R}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

- I. 1° a) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
 b) Déterminer par la méthode du pivot de Gauss le rang de la matrice M_m suivant les valeurs de m .
 c) Donner au moyen des vecteurs de B , une base de l'image et du noyau des endomorphismes f_0 et f_{-1} .
- 2° a) Calculer A^2 .
 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n J = J$
 $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad J^n = 3^{n-1} J$
- b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 3^{n-k-1} m^k = \frac{(m+3) - m^n}{3}$
- c) Pour tout n élément de $\mathbb{N}^\times$, exprimer $(M_m)^n$ en fonction de J , A et I .
- II. 1° a) Soit $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \quad f = af_0 + bg + cid, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
 Montrer que la composée de deux éléments de E est un élément de E .
 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad (f_m)^n \in E$ ($(f_m)^n$ désigne la composée de n applications égales à f_m)
 b) Démontrer qu'il existe un réel λ et un vecteur x tels que $f_m(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, alors $\lambda = m + 3$ où $\vec{x}$ appartient au noyau de f_0 .
- 2° a) Soit $\vec{x} \in B$. Déterminer $f_m(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$. En déduire les matrices de f_m et de g dans B .
 b) Retrouver le résultat du I. 2° c)

PROBLEME

- I. On considère la fonction numérique $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm sur $(O, \vec{i})$; 10 cm sur $(O, \vec{j})$).

- 1° a) Etudier les variations de f et préciser la nature des branches infinies de $(\mathcal{C})$.
 b) Démontrer que $(\mathcal{C})$ possède un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées. Ecrire une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en I .
 c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions (on notera α la plus grande).
 Déterminer l'entier n_0 tel que : $\frac{n_0}{100} < \alpha < \frac{n_0 + 1}{100}$.
 d) Démontrer que, pour x élément de $] -1, +\infty[$, $f(x) \leq x$.
 e) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
- 2° a) Montrer que si $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
 b) On considère alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$
 Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite en justifiant la réponse.
- 3° Soit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$.
 a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$.
 b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2 \ln(k+2) - 3 \ln(k+1) + \ln(k) < f\left(\frac{1}{k}\right)$.
 c) Déduire de b) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right) < S_n$.
 La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

II. Dans cette partie, on suppose que $x \in] -1, 1[$.

- 1° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$.
- 2° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.
- 3° En déduire que : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.
- 4° a) Démontrer que, si t est compris entre 0 et x , alors : $\left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$.
 b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$
 c) Démontrer que : $\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k$.

III. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \neq 0, \varphi(t) = \frac{1}{t} \ln(1+t^2) \end{cases}$

- 1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall t \neq 0, \varphi'(t) = \frac{1}{t} f(t^2)$.
 b) Pour tout réel x , justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$.
- 2° Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$$

 a) Montrer que Φ est impaire.
 b) Démontrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier le sens de variation et la concavité de Φ .

3° a) Pour tout x réel supérieur ou égal à 1, calculer $\int_1^x \frac{2}{t} \ln t dt$.

En déduire que : $\forall x \geq 1, \quad \Phi(x) - \Phi(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

b) Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x$.

En déduire que : $\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \leq \frac{1}{2}$.

4° Soit Γ la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 4 cm.

a) Etudier les branches infinies de Γ .

b) Donner l'allure de Γ (on donne $\Phi(\sqrt{\alpha}) \simeq 1,17$)