Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale

Concours National d'admission 1988

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Chaque partie peut être considérée comme un tout en majorité indépendant des autres parties

Dans ce problème le mot " suite " peut désigner une suite (infinie) indexée par $\mathbb{N}$ ou une suite (infinie " aux deux extrémités ") indexée par $\mathbb{Z}$.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le but de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

PRELIMINAIRE

1. Calculer u_2, u_{-1}, u_{-2}.
2. Montrer que l'on a ainsi totalement caractérisé une suite définie pour tout n entier relatif.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$, u_n est un élément de $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que pour $n \geqslant 5$, on a $u_n \geqslant n$.
   En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

PARTIE I

1. On considère l'équation :
   $$x^2 = x + 1 \qquad (1)$$
   (a) Montrer qu'elle a deux racines réelles. Déterminer leur somme et leur produit.
   On notera désormais Φ la plus grande de ces racines.
   (b) Exprimer en fonction de 1 et Φ les nombres Φ^{-1}, Φ^0, Φ^1, Φ^2, Φ^3
   (c) En utilisant Φ, exprimer de deux manières l'autre racine de (1).
   (d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$, il existe un couple d'éléments de $\mathbb{Z}$, (a_n, b_n) tel que :
   $$\Phi^n = a_n + b_n\Phi$$
2. Soit v_n le vecteur (a_n, b_n) de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, on ait : $v_{n+1} = h(v_n)$.
   Déterminer sa matrice M dans la base $((1,0),(0,1))$.
   (b) La matrice M est-elle inversible ?
   (c) Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{Z}$, les coordonnées de v_n s'expriment simplement en fonction de M et des coordonnées de v_0.

(d) Diagonaliser la matrice M et en déduire l'expression de M^n, puis une expression de a_n et b_n.

3. (a) Calculer directement pour $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n.

   (b) Déduire de ce qui précède et pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de Φ^n, a_n et b_n en fonction des sommes S_n et T_n définies par :

$$S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} 5^k \qquad T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2k+1} 5^k$$

   où $E(p)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à p.

PARTIE II

1. Montrer par récurrence que pour n entier strictement positif, le rapport $\dfrac{u_{-n}}{u_n}$ a une forme très simple que l'on déterminera.
   On se borne donc pour ce qui suit à l'étude de la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la matrice inverse de N si elle existe.

   (b) Montrer que pour n entier positif N^n s'exprime simplement au moyen des éléments de la suite (u_n).

   (c) Etablir que pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $u_{n+2}u_n - (u_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$.
   Ce résultat se généralise-t-il au cas où n est négatif ?

3. Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ définie pour $n \geqslant 2$.

4. Déterminer pour $n \geqslant 1$ la valeur de : $\dfrac{u_{n+1}\Phi + u_n}{u_n\Phi + u_{n-1}}$.

5. Démontrer que pour $n \geqslant 0$ et $m \geqslant 1$ on a : $u_{n+m} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$.

PARTIE III

On considère la fonction f définie pour x réel par : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

1. (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   (b) Déterminer f' et f''.

   (c) Démontrer que f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$.

2. Démontrer que pour n entier strictement positif, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!\left[x^{n+1} + P_n(x)\right]}{(1 - x - x^2)^{n+1}}$$

   où P_n désigne un polynôme de degré *inférieur* ou égal à $n - 1$.
   Donner une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}.

3. (a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n \varepsilon(x)$$

   où ε est une fonction telle que : $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

(b) Montrer que $xf(x)$ et $x^2f(x)$ admettent des développements limités au même ordre n.
En déduire le développement limité de $(x^2+x-1)f(x)$ à l'ordre n.

(c) En utilisant l'égalité $(x^2+x-1)f(x)=-x$ donner une relation de récurrence liant les c_n.

(d) Montrer que pour n entier positif c_n s'exprime en fonction de u_n.

4. (a) Etablir qu'il existe un entier p tel que pour tout n entier naturel non nul on ait : $\Phi^{n+p-1} \leqslant u_n \leqslant \Phi^{n+p}$

(b) Montrer alors que pour x élément de $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ la série de terme général c_nx^n $(n\in\mathbb{N})$ est convergente.

PARTIE IV

On cherche maintenant le nombre de parties de l'ensemble $E=\{1,2,..,n\}$ qui ne contiennent pas deux entiers successifs. Par exemple, $\{2,5\}$ ou l'ensemble vide sont de telles parties. Pour cela on considère le nombre $w_{n,k}$ de parties à k élément ayant cette propriété

1. En citant les partie de E considérées donner les valeurs de w_1, w_2, w_3.
2. On considère l'application H de l'ensemble des parties de E dans l'ensemble des listes formées de n chiffres 0 ou 1 qui, à A associe la liste des chiffres possédant un 1 à la place j si et seulement si j est élément de A.
Par exemple, si $E=\{1,2,3,4\}$ et $A=\{1,4\}$ alors : $H(A)=1001$.
Montrer que H est une bijection.
Les listes considérées seront appelées des mots.
3. En remarquant que dans un mot associé à une partie à k éléments ne contenant pas deux entiers consécutifs un 1 est entièrement déterminer par la place du zéro qui le précède (s'il en existe), montrer que : $w_{n,k}=C^k_{n-k+1}$.
4. (a) Ecrire l'expression de w_n.
(b) Calculer w_n+w_{n+1}
(c) Exprimer w_n en fonction de u_n.

NOTE HISTORIQUE (hors barême !)

La suite (u_n) a été étudiée dès le XIII^e siècle par Léonard de Pise, dit Fibonacci. C'est en 1847 que Lamé en trouva la première application. Les propriétés de cette suite, tant pratiques que théoriques, sont extrêmement nombreuses, au point que depuis 1963 un journal est spécialisé dans leur étude.