Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale

Concours National d'admission 1987

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

L'épreuve est constitué d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On rappelle que $(\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ (où $+$ et $\times$ désignent respectivement l'addition et la multiplication des matrices) esst un anneau dont l'élément unité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. On note $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1° Calculer $A = \dfrac{1}{3}(M - I)$ puis A^2.

2° Par convention, on note $M^0 = I$. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I + u_n A$$

avec : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$

3° Calculer u_n en fonction de n et donner l'expression de M^n en fonction de n.

II. Soit

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1° Calculer J^2; en déduire que J n'est pas inversible dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2° On considère $E = \{aI + bJ, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

a) Montrer que E est stable pour la multiplication des matrices.

b) Quels sont les éléments de E admettant dans E un symétrique pour la multiplication.

c) Résoudre dans E les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X^2 &= I \\ X^2 &= X \end{aligned}$$

3° On se propose de calculer M^n à l'aide de J.

a) Montrer que M appartient à E.

b) En utilisant la formule du binôme de Newton, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = [1 - (-2)^n]J + (-2)^n I$$

III. L'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans B est J.

1° Déterminer, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, une forme réduite de J.
En déduire la dimension de l'image de j et de celle de son noyau.

2° Donner une base de l'image de j ainsi qu'une base de son noyau.

3° Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, $v = x - j(x)$ appartient au noyau de j.
En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$x = s + v$$

s appartenant à l'image de j et v au noyau de j.
Vérifier que l'intersection de l'image et du noyau est réduite au vecteur nul et en déduire l'unicité du couple (s, v)

PROBLEME

A. On rappelle que $\mathcal{F}$, ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\times$ vers $\mathbb{R}$, muni de l'addition des applications (noté $+$) et de la multiplication par les réels (noté $\cdot$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $E = \{f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = ax + bx(\ln x)^2, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
et $F = \{g \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g(x) = \alpha + \beta \ln x + \gamma(\ln x)^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$

1° Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}, +, \cdot)$. Donner une base B de E et une base B' de F.

2° Soit $f \in E$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$.

b) Etablir que $f' \in F$.

c) Prouver que l'application D qui à f associe f' est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$

d) Donner la matrice de D relativement aux bases B et B'

3° Soit $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x[1 - (\ln x)^2] \end{array}$

a) Montrer que k est un élément de E et donner ses coordonnées dans B.

b) Déterminer la fonction dérivée k'.

B. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x[1 - (\ln x)^2] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : 5 cm)

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}_+$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^\times$ l'inéquation :

$$-(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 \geqslant 0$$

c) Déterminer le sens de variation de h.

2° a) Quelle est la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C})$?

b) Etudier la concavité de h.

c) Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'inflexion.

3° Construire $(\mathcal{C})$.

4° Soit $F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{1/e}^{x} h(t)dt \end{array}$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F(x)$ pour $x > 0$, en déduire $F(0)$

c) Soit :

$$A = \{M(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant e \quad \text{et} \quad |y| \leqslant |h(x)|\}$$

Calculer en cm^2 l'aire de A.

5° Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad h^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{x^{n+1}} (n!) \left[\ln x - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \right]$$

où $h^{(n+2)}$ désigne la dérivée d'ordre $n + 2$ de h.

C. 1° a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^\times$. Montrer qu'il existe θ tel que :

$$\theta \in]0, 1[\quad \text{et} \quad h(x) = xh'(\theta x)$$

b) Démontrer que θ est solution de l'équation :

$$(\ln \theta)^2 + 2(\ln x + 1) \ln \theta + 2 \ln x = 0$$

c) Résoudre cette équation. On note θ_1 et θ_2 les solutions ($\theta_1 < \theta_2$).

2° a) Donner la valeur de $\ln \theta_1 + \ln \theta_2$ et de $(\ln \theta_1) \times (\ln \theta_2)$.

b) Montrer que pour $x > 1$, θ_1 et θ_2 appartiennent à $]0, 1[$.

c) Etablir que pour $x \leqslant 1$, θ_1 est élément de $]0, 1[$ et θ_2 appartient à $[1, +\infty[$.

D. Soit $\varphi: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(1 - \ln x - \sqrt{1 + (\ln x)^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{e} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ (où exp est la fonction exponentielle)

1° a) Montrer que φ est continue en 0.

b) φ est-elle dérivable en 0 ?

c) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \varphi$.

2° a) Etudier les variations de φ.

b) Construire la représentation graphique (Γ) de φ dans le repère de la partie B.

3° Soient M et N les points d'abscisse x ($x > 0$) appartenant respectivement à $(\mathcal{C}) \cap (\Gamma)$: H et K désignent les projections orthogonales repectives de N sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ et l'axe $(O, \overrightarrow{j})$. On note P le point de coordonnées $(0; 1)$

a) On désigne par (Δ) la parallèle à la droite (PH) passant par K. Déterminer les coordonnées de l'intersection L de (Δ) et de l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

b) Soit M_1 le point de $(\mathcal{C})$ de même abscisse que L. Démontrer que la tangente en M_1 à $(\mathcal{C})$ est parallèle à la droite (OM). On illustrera cette question 3° sur le graphique en donnant à x la valeur 1.