Concours National des E.S.C.A.E.

Option économique

Concours National d'admission 1987

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

PROBLEME I

I. 1° On considère la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice A.
(Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie).

2° Soient a, b et c trois nombres réels vérifiant la condition :

$$a + bx + cx^2 > 0$$

pour tout $x \geqslant 1$.
On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} I = [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{a + bx + cx^2} \end{array}$$

où ln désigne le logarithme népérien.
Déterminer, en utilisant I. 1°, les coefficients a, b et c pour que :

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{\ln 2}{8} \\ f(3) &= \frac{\ln 3}{15} \\ f(4) &= \frac{\ln 4}{24} \end{aligned}$$

3° On désigne par h la fonction :

$$h : \begin{array}{ccc} I = [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 2 - 2(x+1)\ln x \end{array}$$

a) Justifier la dérivabilité de h sur I et établir que, pour tout $x \geqslant 1$, $h'(x) < 0$.

b) Justifier l'existence et l'unicité d'un unique réel x_0 appartenant à I tel que $h(x_0) = 0$.
Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$\frac{n}{100} \leqslant x_0 < \frac{n+1}{100}$$

En déduire le signe de $h(x)$.

II. Soit g la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} I = [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\alpha \ln x}{x^2 + 2x} \end{array}$$

où α désigne un réel strictement positif, dont la valeur sera fixée à 12 uniquement dans les questions II. 1° d) et II. 2° c).

On appelle $\mathcal{C}_\alpha$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Justifier la dérivabilité de g sur I et vérifier que pour tout $x \geqslant 1$:

$$g'(x) = \frac{\alpha h(x)}{(x^2 + 2x)^2}$$

où h désigne la fonction introduite en I. 3°

b) Etudier les variations de g et la branche infinie de $\mathcal{C}_\alpha$, et montrer que :

$$g(x_0) = \frac{\alpha}{2x_0(x_0 + 1)}$$

c) Préciser l'équation de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}_\alpha$ au point d'abscisse 1.

d) Tracer $\mathcal{C}_\alpha$ et Δ, l'unité graphique étant égale à 4 cm.

2° On note k la restriction de g à l'intervalle $J = [1, x_0]$.

a) Démontrer que k réalise une bijection de J sur un intervalle que l'on précisera (on ne cherchera pas à expliciter la fonction réciproque k^{-1}).

b) Montrer que k^{-1} est dérivable en 0.
Calculer $(k^{-1})'(0)$.

c) Construire la courbe représentative de k^{-1} dans le repère précédent, en précisant les tangentes particulières.

3° a) Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive G sur I, de la fonction g, prenant la valeur 0 en $x = 1$, et montrer qu'elle vérifie, pour $x \geqslant 1$:

$$G(x) = \int_1^x g(t)dt.$$

(On ne cherchera pas à expliciter cette primitive)

b) Etablir que la fonction G est strictement croissante sur I.

4° Prouver que, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{\alpha \ln t}{(t+1)^2}dt \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{\alpha \ln t}{t^2}dt.$$

5° a) Calculer, pour tout x élément de I, l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$$

b) En déduire que, pour $x \geqslant 1$: $G(x) \leqslant \alpha$.

c) Prouver que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} g(t)dt$$

est convergente.

6° a) Calculer, pour tout $x \geqslant 1$, l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{dt}{t(t+1)}$$

(On pourra montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $t \geqslant 1$: $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$)

b) Etablir que :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1}$$

c) En déduire un encadrement de $\int_1^{+\infty} g(t)dt$.

PROBLEME II

I. Une raffinerie fonctionne selon les données suivantes :

a. Renseignements techniques :

- 8 000 tonnes de brut de trois qualités différentes sont traitées chaque jour et la raffinerie doit toujours fonctionner à cette capacité.
- Les quantités de produits obtenus (exprimées en tonnes) après raffinage de 100 tonnes de brut sont les suivantes :

Matière première Production	Brut n° 1 Moyen-Orient	Brut n° 2 Amérique	Brut n° 3 Sahara
Gaz de pétrole liquéfiés (GPL)	5	—	6
Essence	24	18	30
Gazole	36	32	30
Fuel lourd	30	45	30
Combustible brûlé en raffinerie	5	5	4
	100	100	100

b. Renseignements commerciaux.

- Les prix d'achat du brut (frais de transport compris) sont :
  brut n° 1 : 1 000 F / tonne
  brut n° 2 : 800 F / tonne
  brut n° 3 : 1 100 F / tonne
- Les prix de vente des produits au sortir de la raffinerie sont :
  gaz de pétrole liquéfié : 1 500 F / tonne
  essence : 2 200 F / tonne
  gazole : 2 100 F / tonne
  fuel lourd : 600 F / tonne

A

Sachant que pour une journée donnée de fonctionnement, on a obtenu 2 700 tonnes de gazole et 260 tonnes de GPL :

1° Calculer les quantités des différents bruts B_1, B_2 et B_3 constituant les 8 000 tonnes traitées ce jour-là.

2° Déterminer l'ensemble de la production de la raffinerie et le montant total des ventes réalisées par cette production, ce jour-là.

3° En supposant de plus que cette production a permis un bénéfice de 730 000 F, montrer que le montant des charges (salaires, énergie, stockage, ...) s'élève, pour ce jour, à 3 500 000 F.

B

Des contrats stipulent que la raffinerie doit acheter chaque jour les quantités minimales suivantes : 1 000 tonnes de brut n° 1, 1 000 tonnes de brut n° 2 et 500 tonnes de brut n° 3.
En outre, il n'est pas possible d'écouler sur le marché plus de 300 tonnes de GPL, ni plus de 3 000 tonnes de fuel lourd par jour.
Enfin, il est nécessaire de fournir au moins 1 800 tonnes d'essence par jour.
On note respectivement x, y, z les centaines de tonnes de brut B_1, B_2, B_3 traités au cours d'une journée.
On rappelle que $x + y + z = 80$

1° Ecrire le système des contraintes à l'aide des seules variables x et y.

2° Construire le polygône des contraintes de la raffinerie.

3° En supposant que le montant journalier des charges reste égal à 3 500 000 F, établir que le bénéfice quotidien B, exprimé en fonction de x et y, correspond à

$$B(x, y) = 7,9x + 7,8y + 180$$

l'unité choisie étant le kF (1kF=1 000 F)

4° Tracer sur le graphique de 2°, la droite représentant l'ensemble des couples (x, y) tels que :

$$B(x, y) = 730$$

5° Quelles doivent être les quantités des différentes bruts traités quotidiennement pour maximiser le bénéfice B ?
Quel est alors le bénéfice optimal ?

6° Une modification du contrat d'approvisionnement en brut saharien peut-elle présenter des avantages ? Si oui, préciser cette modification et déterminer le nouveau bénéfice optimal réalisable.

II. La raffinerie envisageant une extension de ses activités, examine deux propositions de financement :
Proposition 1 :

- La somme empruntée est remboursée à l'aide de versements mensuels tous égaux, effectués le dernier jour de chaque mois.
- $1^{ère}$ échéance un mois après l'emprunt.
- Taux d'intérêt mensuel t=0,8 % (un client ayant envers la banque une dette de x francs le 1^{er} jour d'un mois donné, voit sa dette, le dernier jour de ce mois, s'il ne s'en ait pas acquitté auparavant, augmentée des intérêts égaux à $x.t$).

Proposition 2 :

- Remboursement par versement mensuels tous égaux.
- $1^{ère}$ échéance un mois après l'emprunt
- Taux annuel t'=10 % (si au cours d'une année, il apparait envers la banque, sur une durée de 1 mois, une dette de x francs, des intérêts d'un montant de $x.\dfrac{t'}{12}$ sont dus à la fin de cette année)

1° Etude de la proposition 1 :
On désigne par D_0 le capital emprunté, t le taux mensuel, R le montant d'un remboursement mensuel et par D_n, pour $n \geqslant 1$, le montant de la dette après n remboursement.

a) Justifier que : $D_1 = D_0(1+t) - R$.
Déterminer D_n en fonction de D_{n-1}, t et R.

b) Calculer D_n en fonction de D_n, t, R et n.

2° Etude de la proposition 2 :
On désigne par D'_0 le capital emprunté, t' le taux annuel, R' le montant d'un remboursement et par D'_k, pour $k \geqslant 1$, le montant de la dette après le $12^{ième}$ versement de la $k^{ième}$ année.

a) Montrer que le montant des intérêts qui sont dus à la fin de la $k^{ième}$ année, en raison de la dette courant le $i^{ième}$ mois de cette $k^{ième}$ année est :

$$[D'_{k-1} - (i-1)R'].\frac{t'}{12}$$

Vérifier que, pour les 12 mois, le montant total I_k des intérêts dus à la fin de la $k^{ième}$ année est :

$$I_k = D'_{k-1}.t' + 5,5R'.t'$$

b) En remarquant que :

$$D'_k = D'_{k-1} + I_k - 12R'$$

Calculer D_k en fonction de D'_0, t', R' et k'.

3° La raffinerie veut emprunter 15 000 000 F qu'elle désire rembourser en 3 ans.
Calculer les remboursements R et R' au franc près.
Conclure.