Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale et économique

Concours National d'admission 1986

MATHEMATIQUES II

Statistiques et probabilités

EXERCICE

Le tableau suivant indique la répartition des dépenses mensuelles moyennes (alimentaires; habillement-loisirs) des ménages non agricoles (deux adultes et un enfant mineur) suivant leur revenu mensuel moyen en 1984

Revenu mensuel	Dépenses	
moyen x_i	Alimentaires y_i	Habillement-loisirs z_i
3 980	3 090	200
6 030	3715	407
7 940	4 170	661
10 000	4 570	1 000
15 140	5 510	2 042
25 120	7 080	4 786
39 810	8 710	10 223

1. Représenter, sur un même papier à deux échelles logarithmiques, le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ et le nuage des points $N_i(x_i, z_i)$.
   Que peut-on en conclure ?

2. On pose $R_i = \log x_i$; $A_i = \log y_i$ et $H_i = \log z_i$ (log désigne le logarithme décimal)

   N.B. Pour traiter cette question, il est exigé de dresser un tableau de calculs indiquant toutes les valeurs ainsi que les sommes nécessaires à la détermination des paramètres demandés. Pour réaliser ce tableau, les logarithmes seront arrondis, au plus proche, à 0,01 près et tous les autres nombres du tableau en seront déduits sans nouvel arrondi

   Déterminer, par la méthode des moindres carrés :

   (a) l'équation $A = cR + b$ de la droite D de régression de A par rapport à R;

   (b) l'équation $H = dR + e$ de la droite D' de régression de H par rapport à R;

   N.B. Les coefficients c, b, d et e seront arrondis, au plus proche, à 0,01 près

3. En déduire les relations fonctionnelles $y = kx^t$ et $z = \frac{h}{10^5}x^m$.
   N.B. Les coefficients k, t, h et m seront arrondis, au plus proche, à 0,01 près

4. Tracer les droites D et D' sur le graphique précédent.
   N.B. Au préalable, on déterminera deux points de chacunes d'elles

5. Calculer, au franc près, le montant estimé de chacun des deux postes de dépenses pour un ménage dont le revenu moyen s'élève à 20 000 F.

6. Déterminer, graphiquement et par le calcul, le revenu mensuel moyen d'un ménage dont les deux postes de dépenses étudiés sont estimés de même montant.
   En déduire ce montant.

PROBLEME

Une machine fabrique en série des pièces utilisées dans la construction d'un appareil électro-ménager.

Dans ce problème, on étudie le fonctionnement de cette machine suivant trois critères différents :
Partie I : L'une des dimensions du produit usiné.
Partie II : La qualité du produit usiné.
Partie III : Les pannes de cette machine.
Ces trois parties sont totalement indépendantes les une des autres et les candidats peuvent traiter dans l'ordre de leur choix.

Partie I

Une des dimension de la pièce usiné doit être 10 centimètres..
Une marge de tolérance m est cependant permise, c'est-à-dire que toute pièce dont la dimension (en centimètres) est élément de l'intervalle $[1\grave{a} - m, 10 + m]$ est acceptée.
On a constaté que cette dimension définit une variable aléatoire L régie par la loi normale $\mathcal{N}(10; 0, 12)$.

1. Calculer, à 0,0001 près :

   (a) la probabilité qu'une pièce mesure moins de 9,85 cm;

   (b) la probabilité qu'une pièce mesure moins de 10,21 cm sachant qu'elle mesure de plus de 9,85 cm

2. Sur 4 375 pièces usinées, 924 ont dû être refusées (moitié d'entre elles étant trop longues et les autres trop courtes)
   En déduire, au 1/10 de milimètre près, la marge de tolérance m permise.

3. En supposant que le réglage de la machine permette que la variable aléatoire L soit toujours régie par une loi normale $\mathcal{N}(10, \sigma)$ quelle valeur maximum, au 1/10 de milimètre près, faudrait-il pouvoir donner à σ pour que 90 % de la production soient acceptés ?

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à une production de 50 pièces conformes au point de vue dimension.
La qualité des pièces est contrôlée par une seconde machine et la probabilité que l'une quelconque d'entre elle soit refusée est 0,135.

1. Le nombre de pièces refusées parmi les 50 considérées définit une variable aléatoire X.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Calculer (valeurs arrondies au plus proche à 0,001 près) $E(X)$, $\sigma(X)$ et $P(X \geqslant 2)$.

2. La probabilité que le contrôle refuse une pièce en bon état est 0,05 et celle qu'il accepte une pièce défectueuse est 0,1.

   (a) On note p la probabilité qu'une pièce quelconque soit défectueuse à la production.
   Exprimer, en fonction de p, la probabilité qu'une pièce quelconque soit refusée par le contrôle. En déduire p.

   (b) Calculer la probabilité qu'une pièce quelconque soit refusée à tort par le contrôle.

   (c) Le nombre de pièces refusées à tort parmi les 50 considérées définit une variable aléatoire Y.
   Déterminer la loi de Y.

3. (a) Calculer la probabilité qu'une pièce quelconque acceptée à tort par le contrôle.

(b) Le nombre de pièces acceptées à tort parmi les 50 considérées définit une variable aléatoire Z.
Déterminer la loi de probabilité de Z.
Justifier par quelle loi il est possible de l'approcher.
En déduire le plus petit entier naturel k tel que $P(Z \leqslant k) \geqslant> 0,99$.

4. Le responsable de production, peu satisfait du contrôle précédent, fait réexaminer les pièces, qui parmi les 50 considérées, ont été refusées au contrôle et toutes celles qui l'ont été à tort sont ainsi détectées sans erreur.
En moyenne, le coût de cet examen supplémentaire s'élève à 115 F pour chaque bonne pièce ainsi récupérée.
D'autre part, il faut essayer chaque appareil électro-ménager sur lequel a été montée une des pièces qui, parmi les 50 considérées, n'a pas été réexaminée. Si cet appareil est défaillant en raison de cette pièce, le coût de remplacement s'élève à 150 F.
Calculer l'espérance mathématique de la perte financière F due au mauvais fonctionnement de la machine ayant contrôlé la qualité des 50 pièces considérées.

Partie III

Un élément fragile de la machine de production est la source des pannes de celles-ci. Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé. Sa durée de vie et le temps de dépannage sont tels qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour.
Soit p_1 la probabilité de bon fonctionnement de cette machine le jour de sa mise en service.
Si la machine fonctionne correctement le jour j, la probabilité qu'elle fonctionne aussi correctement le jour $j+1$ est 0,6. Si l'élément fragile est changé le jour j (panne de la machine ce jour) la probabilité de bon fonctionnement le jour $j+1$ est 0,9.

1. Calculer, en fonction de p_1, la probabilité p_2 de bon fonctionnement le deuxième jour de production puis, en fonction de p_2, la probabilité p_3 de bon fonctionnement au troisième jour de production.
Exprimer de même la probabilité p_{n+1} de bon fonctionnement le $(n+1)^{ième}$ jour en fonction de la probabilité de p_n de bon fonctionnement le $n^{ième}$ jour.
En déduire p_n en fonction de p_1 et n.

2. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{9}{13}$ et vérifier que $\forall p_1 \in [0,1], \quad n \geqslant 7 \Rightarrow \left|p_n - \dfrac{9}{13}\right| < 0,001$

3. p_n étant donc rapidement proche de sa valeur limite, on considère désormais que la probabilité de bon fonctionnement de la machine est $\dfrac{9}{13}$ dans l'hypothèse où l'élément défaillant est seulement changé après panne.
Chaque jour, on intervient donc une ou zéro fois sur cette machine suivant qu'elle tombe en panne ou non.
En cas de panne, le coût d'intervention s'élève à 5 200 F et se décompose en 700F de pièce et main-d'oeuvre et 4 500 F de perte de production.
Le coût d'intervention quotidien définit une variable aléatoire C_1 dont on demande l'espérance mathématique.

4. On envisage un entretien préventif de cette machine consistant à remplacer chaque jour l'élément source de panne et cela avant la mise en service de la machine.
Chauqe jour, on interviendra donc deux ou une fois sur cette machine suivant qu'elle tombe en panne ou non.
L'intervention obligatoire avant mise en service coûtera toujours 700 F et celle, éventuelle, en cours de journée toujours 5 200 F.
Dans cette hypothèse, le coût d'intervention quotidien définit une nouvelle variable aléatoire C_2 dont on demande l'espérance mathématique.
Doit-on choisir de continuer à pratiquer seulement l'intervention après panne ou au contraire l'entretien préventif envisagé ?

5. Plus généralement, si le total pièce et main-d'oeuvre s'élève à x francs et la perte de production à y francs, quelle relation doit-on avoir entre x et y pour que le choix porte sur la politique de dépannage plutôt que sur l'entretien préventif ?