

Concours National d'admission 1986

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

- I. On note a un réel différent de 1 et on considère l'ensemble S des suites réelles $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = (2-a)w_{n+1} + (a-1)w_n$$

On rappelle que S est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles.

1° Déterminer suivant les valeurs de a une base de S .

2° Soit w un représentant de S . Pour n entier naturel exprimer, suivant les valeurs de a , w_n en fonction de w_0 et w_1 .

Préciser la réponse si $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

- II. A tout couple (a, b) de réels différents de 1, on associe la matrice :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

et on désigne par E l'ensemble de ces matrices.

1° Démontrer que E , muni de la multiplication des matrices, est un groupe commutatif.

2° Résoudre dans E les équations suivantes :

a) $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$

b) $[M(a, b)]^2 = I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- III. a étant un réel différent de 0 et 1, on note $M = M(a, a)$.

1° Démontrer que M^2 est combinaison linéaire de M et de I .

2° Etablir l'existence de deux suites réelles $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha_n M + \beta_n I$$

α et β vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = x\alpha_n + y\beta_n \\ \beta_{n+1} = x'\alpha_n + y'\beta_n \end{cases}$$

x, y, x', y' étant des réels que l'on déterminera.

3° Vérifier que α appartient à S . En déduire l'expression de α_n puis celle de β_n en fonction de n .

4° Expliciter M^n .

IV. Soit $A = M(2, 2)$

On désigne par F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de A et I .

- 1° Démontrer que $(F, +, \times)$ (les symboles désignent les opérations usuelles dont on munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3) est un anneau commutatif.
- 2° Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $(F, +, \times)$?
- 3° L'anneau $(F, +, \times)$ est-il intègre ?
- 4° Quels sont les éléments de F admettant un symétrique pour la multiplication des matrices de F ?

PROBLEME

Pour tout n entier naturel, on considère la fonction :

$$g_n : \begin{array}{ccc}]0, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \end{array}$$

- I. 1° a) Montrer que g_n admet un prolongement par continuité noté f_n sur $[0, 1]$.
b) Etudier la dérivabilité de f_n sur $[0, 1]$ et dresser le tableau des variations de f_n .
c) Justifier que f_n est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et que pour tout entier naturel n non nul et tout x de $]0, 1[$:

$$x f_n''(x) + n f_{n-1}'(x) = 0$$

- d) On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ noté $\mathcal{R}$ (unité : 10 cm). Dédurre de ce qui précède l'étude de la concavité de $\mathcal{C}_n$.
- 2° a) Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

- b) Etablir que pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$.
En déduire I_n en fonction de n .

- II. 1° a) Pour n entier naturel non nul, on note M_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse e^{-n} . Montrer que les points M_n appartiennent à une courbe Γ dont on donnera une équation $y = \gamma(x)$, $x \in]0, 1[$.
b) On considère les fonctions :

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]0, 1[& \rightarrow & \mathbb{R}_+^\times \\ x & \mapsto & -\ln x \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\times & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^x e^{-x} \end{array}$$

Vérifier que $\gamma = h \circ \varphi$.

Etudier la dérivabilité de h ; en déduire celle de γ , l'expression de γ' et les variations de γ .

Préciser les limites de γ aux bornes de son ensemble de définition; étudier la limite en 1 de γ' ;

Interpréter graphiquement ces résultats.

- 2° Construire Γ , $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ dans le repère $\mathcal{R}$ (on placera soigneusement les points d'inflexion de $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{C}_3$)

- III. 1° Pour $k \in \mathbb{N}^\times$, on note $f_2^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f_2 .
Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$ et pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f_2^{(k)}(x) = \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)^{2-k}}{x^{k-1}} P_k \left(\ln \frac{1}{x} \right)$$

P_k étant un polynôme dont on précisera le degré.

Expliciter P_1 , P_2 et P_3 .

2° a) Prouver à partir du I. 1° c) que pour tout x de $]0, 1[$:

$$xf_2''(x) + x^2 f_2^{(3)}(x) = 2 \quad (E)$$

b) En dérivant $(n - 2)$ fois l'égalité (E) pour n entier supérieur ou égal à 3, établir la relation :

$$P_{n+1} + (2n - 3)XP_n + (n - 2)^2 X^2 P_{n-1} = 0$$