

Concours National d'admission 1984

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

On considère l'espace vectoriel E_n des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, où n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

On note : 0 la matrice nulle de E_n

I la matrice unité de E_n

Soit A un élément de E_n tel que : $A \neq 0$ et $A \times A = 0$.

1. α et β étant deux réels, montrer que :

$$\alpha A + \beta I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

2. Soit E'_n le sous-espace vectoriel de E_n engendré par (A, I) .

Quelle est la dimension de E'_n ?

Montrer que E'_n est stable par multiplication des matrices.

3. On pose : $B = A + I$.

- (a) Déterminer un élément B' de E'_n vérifiant $B' \times B' = I$

Que peut-on dire de B' relativement à B ?

- (b) Calculer B^2 et B^3 en fonction de A et I .

- (c) p étant un entier strictement positif, calculer B^p en fonction de p , A et I .

En déduire $S_p = B + B^2 + \dots + B^p$ en fonction de p , A et I .

4. *Application numérique* : On suppose $n = 3$.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $(B - I)^2$.

- (b) Déterminer la matrice inverse de B .

- (c) Calculer en fonction de p , ($p \in \mathbb{N}^\times$) :

$$S_p = B + B^2 + \dots + B^p$$

5. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, vérifiant : $u \neq 0$ et $u \circ u = 0$
 0 désigne l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

- (a) Vérifier l'inclusion : $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

- (b) Déterminer les dimensions de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

6. Soit v l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice $B - I$ sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
 B désigne la matrice donnée à la question 4.
 Donner une base de $\text{Im}(v)$ et de $\text{ker}(v)$.
 En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de v s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME

Dans tout le problème, on désigne par E l'ensemble : $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- I. On considère la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f , dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Unités : 8 cm sur l'axe $(O, \vec{i})$
 2 cm sur l'axe $(O, \vec{j})$

- 1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur E .
 b) Donner le tableau de variation de f .
 c) Donner les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}$ et une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
 d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
- 2° a) Montrer que pour tout x appartenant à $[\frac{1}{2}, 1]$, on a :

$$2(x - 1) \leq \ln x$$

- b) En déduire que pour tout α appartenant à $[\frac{1}{2}, 1[$, on a :

$$\int_{1/2}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{1/2}^{\alpha} \frac{dx}{(x - 1)}$$

- II. On pose $F(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$.

- 1° a) Montrer que F est définie sur E . Préciser le signe de F .
 b) Démontrer que F est dérivable sur E .
 Calculer $F'(x)$ pour x non nul. En déduire les variations de F .
 Préciser $F'(0)$.
- 2° a) Démontrer que pour tout x strictement positif, on a :

$$F(x) \geq \frac{x(x - 1)}{2 \ln x}.$$

- b) En déduire la limite de F en $+\infty$ et la nature de la branche infinie de la courbe représentative Γ de F .

- 3° On se propose de montrer que F admet une limite en 1.

a) Soit φ la fonction : $[\frac{1}{2}, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ \frac{t-1}{\ln t} & \text{si } t \neq 1 \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $[\frac{1}{2}, 4]$ et justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout t élément de $[\frac{1}{2}, 4]$, on ait :

$$\varphi(t) \leq M.$$

b) Soit $\psi : [\frac{1}{2}, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (t-1)^2 - (t-1) + \ln t$$

Prouver que la fonction ψ est positive ou nulle.

En déduire que pour tout t élément de $[\frac{1}{2}, 1[\cup]1, 4]$, on a :

$$\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \leq \varphi(t)$$

On rappelle que pour tout t de $\mathbb{R}_+^\times$, on a : $\ln t \leq t - 1$.

c) Montrer que pour tout t élément de $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, on a :

$$0 \leq \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \leq Mx(1-x)$$

puis que pour tout x élément de $[1, 2]$, on a :

$$0 \leq \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \leq Mx(x-1)$$

En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = 0$$

d) Prouver alors que F admet $\ln 2$ pour limite en 1.

e) Calculer la limite de F' en 1. En déduire que F admet un prolongement G dérivable en 1.

4° Donner l'allure de la courbe représentant la fonction prolongée G .

III. Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction :

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{(\ln x)^n} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1° a) Etudier la continuité de f_n sur E .

b) Etudier les variations de f_n (On discutera suivant la parité de n).

c) On note x_n l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f_n .

Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2° a) Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{1/e} f_n(x) dx$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$|I_n| \leq \frac{1}{e}.$$

c) Pour n strictement supérieur à 1, exprimer I_n en fonction de n et de I_{n-1} .

d) Dédurre des deux questions précédentes que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.