Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale et technologique

Concours National d'admission 1983

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

EXERCICE

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I. 1° Calculer A^2. Vérifier la relation

$$A^2 - 3A + 2I = \mathrm{O}$$

2° En déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

3° On pose

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ \forall n &\in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} A^{n+1} = A^n \times A \\ B_n = A^n + A - 2I \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer successivement que, pour tout n entier naturel, on a :

a) $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

b) $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$

c) $B_{n+2} = 2B_{n+1}$.

4° Calculer, pour tout n entier naturel, B_n en fonction de B_0 et de n. En déduire A^n en fonction de A et de n et donner l'expression de A^n en fonction de n.

5° Pour tout n entier naturel non nul, on note

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Montrer que l'expression obtenue en 4. est encore valable pour les exposants strictement négatifs.

II. Soit E l'espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et g une application linéaire de E dans E vérifiant :

$$g \circ g - 3g + 2i = \theta$$

où

$$i \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right., \qquad \theta \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & O_E \end{array} \right. \qquad (O_E \text{ est le vecteur nul de } E)$$

On note

$$\begin{aligned} &h = g - i \\ &g^0 = i \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{n+1} = g^n \circ g \end{aligned}$$

1° Montrer que :

$$h \circ h = h$$

Exprimer g^2 et g^3 en fonction de i et de h.

2° Etablir par récurrence que, pour tout n entier naturel, il existe un couple de réels (a_n, b_n) vérifiant :

$$g^n = a_n i + b_n h.$$

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

3° Retrouver directement l'expression de g^n à l'aide du binôme de Newton.

4° Vérifier alors le résultat établi en I. 4°

PROBLEME

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (nx+1)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; Unité : 8 cm.

I. 1° a) Etudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner le sens de variation de f_n.

c) Etudier, suivant les valeurs de n, la branche infinie de (C_n); on donnera une équation de l'asymptote à (C_n).

d) Discuter, suivant les valeurs de n, l'existence d'un point d'inflexion I_n de (C_n) dont on donnera les coordonnées.

e) Construire dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les courbes (C_0), (C_1), (C_2).

2° On veut démontrer que, pour tout k entier naturel non nul, f_n admet une dérivée $k^{ième}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_n^{(k)}(x) = P_{n,k}(\frac{1}{x})e^{-1/x}$$

où $P_{n,k}$ est une fonction polynôme de degré $2k$.

a) Vérifier la propriété pour les valeurs 1, 2, 3 de k, en précisant les fonction $P_{n,1}$, $P_{n,2}$, $P_{n,3}$.

b) Démontrer la propriété par récurrence; expliciter $P_{n,k+1}$ en fonction de $P_{n,k}$ et de sa dérivée. En déduire $P_{n,1}$.

II. Dans cette partie, n est fixé égal à 1.

1° Soit x_0 un réel strictement positif; montrer que la tangente à (C_1) au point d'abscisse x_0 coupe l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ en un point d'abscisse $g(x_0)$ où :

$$g(x_0) = \frac{x_0}{1 + x_0 + x_0^2}$$

2° On définit la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad u_p = g(u_{p-1}) \end{array} \right.$$

a) Etudier les variations de g sur $[0, 1]$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$0 < u_p < \frac{1}{p+1}$$

c) Montrer que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3° Soit M_p le point de l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ d'abscisse u_p.
Par construction géométrique obtient-on le point M_{p+1} ?

4° Pour p entier naturel non nul,

a) Calculer $\dfrac{1}{u_p} - \dfrac{1}{u_{p-1}}$ en fonction de u_{p-1}.

b) Montrer que :

$$1 < \frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_{p-1}} < 1 + \frac{1}{p}$$

En déduire que :

$$p < \frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_0} \leqslant p + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

5° a) Pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 2, comparer $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$, et montrer que pour tout p entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} \leqslant \ln p$$

b) En déduire que la suite $(pu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge; préciser sa limite.

III. 1° Justifier l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^1 f_n(x)dx.$$

2° Démontrer qu'il n'existe qu'une seule valeur de n, notée n_0, pour laquelle la fonction f_n possède sur $\mathbb{R}_+$ une primitive F_n telle que :

$$\begin{cases} F_n(0) = 0 \\ \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad F_n(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-1/x} \end{cases}$$

3° Calculer $\int_0^1 f_{n_0}(x)dx$.
Interpréter géométriquement le résultat.