

Concours National d'admission 1980

MATHEMATIQUES II

Statistique et probabilités

EXERCICE I

*N.B. Dans cet exercice, **TOUS** les nombres figurant dans le tableau de calcul seront arrondis, au plus proche, à 0,001 près et les calculs seront effectués **UNIQUEMENT** à partir de ces valeurs. Les résultats seront indiqués avec la même précision.*

On considère la statistique ci-dessous dans laquelle :

x_i représente un revenu en francs;

N_i représente le nombre de revenus supérieurs ou égaux à x_i .

x_i	N_i
10 000	3 156 558
20 000	471 637
30 000	122 492
50 000	48 492
100 000	5 075
200 000	976
300 000	235
500 000	54

1. On pose $u_i = \log x_i$ et $v_i = \log N_i$, où la notation $\log$ désigne le logarithme décimal.
Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

u_i	v_i
...	...
...	...
...	...

Représenter, sur un papier à l'échelle arithmétiques, le nuage des points $M_i(u_i, v_i)$.

Axe des u : origine : point d'abscisse 4; unité : 10 cm;

Axe des v : origine : point d'ordonnée 1; unité 4 cm.

2. On se propose d'ajuster ce nuage par une droite en utilisant la méthode des moindres carrés.
- (a) Compléter le tableau du 1° afin de faire apparaître tous les résultats nécessaires au calcul demandé en c).
 - (b) Citer les formules donnant les coefficients de l'équation cherchée.
 - (c) Donner l'équation de la droite des moindres carrés ajustant v par rapport à u .
 - (d) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique précédent.

3. En déduire les réels A et α , compris entre 1 et 10, et l'entier naturel k tels que $N = \frac{A10^k}{x^\alpha}$.

EXERCICE II

Une machine remplit des paquets dont le poids prévu est 250 g.

Soit X la variable aléatoire ayant pour valeurs les poids possibles d'un paquet à la sortie de la machine.

I. Dans cette partie, on suppose que X est la variable aléatoire discrète de loi de probabilité

$x_i, \dots$	220	230	240	250	260	270	280
$p_i, \dots$	0,07	0,11	0,19	0,26	0,18	0,13	0,06

1° Calculer, à 0,001 près par défaut, l'écart-type de X .

2° On prélève successivement n paquets et on admet que, bien qu'étant exhaustifs, les tirages ne modifient pas la composition de la population.

a) On choisit $n = 10$.

Calculer : la probabilité p' que au moins un paquet pèse 220 g

la probabilité p^* que au plus un paquet pèse 220 g

Les valeurs de p' et p^* seront arrondies au plus proche à 0,001 près.

b) Déterminer la valeur minimum n_0 de n pour que la probabilité d'obtenir au moins un paquet de 220 g soit supérieur à 0,95.

3° Afin de limiter la mise en vente de paquets dont le poids est inférieur à 250 g, la production est contrôlée à la sortie de la remplisseuse.

On admet que la probabilité que le paquet soit signalé non conforme par le contrôle est :

1 si son poids est 220 g;

0,9 si son poids est 230 g;

0,8 si son poids est 240 g.

a) Calculer la probabilité qu'un paquet venant d'être rempli soit déclaré non conforme par le contrôle.

b) Le coût du paquet à la sortie de la remplisseuse est évalué à 5 centimes le gramme.

Les paquets déclarés non conformes par le contrôle sont complétés afin que leur poids soit effectivement rendu supérieur ou égal à 250 g.

On considère que le coût d'un paquet complété est égal au coût résultant de son poids initial majoré d'une somme forfaitaire de 5 F.

Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur les coûts possibles d'un paquet à la mise en vente.

Calculer l'espérance mathématique de Y .

II. Dans cette partie, on suppose que $X = 220 + 10Z$ suit la loi de Poisson de paramètre 3.

1° Quel est, à 0,001 près par défaut, l'écart-type de X .

2° Calculer les probabilités $P(X = 220)$; $P(X = 230)$; $P(X = 240)$.

Ces valeurs seront arrondies au plus proche à 0,001 près.

3° On reprend les hypothèses du I.3°. Calculer :

a) La probabilité qu'un paquet venant d'être rempli soit déclaré non conforme par le contrôle (arrondir le résultat, au plus proche, à 0,001 près).

b) La probabilité qu'un paquet pèse 240 g sachant qu'il a été déclaré non conforme (donner la réponse avec le même arrondi).

c) L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y définie au I.3° b), compte-tenu de la nouvelle loi de probabilité choisie pour X .

III. Dans cette partie, on suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(250, 16)$.

1° Calculer les probabilités : $P(X = 220)$; $P(X = 230)$; $P(X = 240)$

N.B. Etant donné que l'on réalise une approximation d'une loi discrète par une loi continue, on remplace

$X = 220$ par $X < 225$

$X = 230$ par $225 < X < 235$

$X = 240$ par $235 < X < 245$, etc.

- Les valeurs de l'aléa centré réduit T , nécessaires à l'utilisation des tables seront arrondies, au plus proche à 0,01 près.
 - Les probabilités demandées seront fournies avec la précision permise par ces tables.
- 2° On reprend à nouveau les hypothèses du I.3°.
- Calculer, compte-tenu de la nouvelle loi de probabilité choisie pour X , l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y définie au I.3° b).
- 3° En tenant compte du *nota bene* du 1°, représenter, sur papier gaussien-arithmétique, le nuage de points correspondants à la distribution donnée en I et tracer la droite de Henry représentant la loi normale choisie en approximation de cette distribution.
- (On précisera les coordonnées de deux points permettant le tracer de cette droite)