Concours National d'admission 1979

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

EXERCICE I - APPLICATION SIMPLE

Soit $\mathfrak{M}_3$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité de $\mathfrak{M}_3$.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^2, A^3 et A^4.

2. Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathfrak{M}_3 \\ x & \mapsto & I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \end{array} \right.$

   (a) Montrer que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) \times f(y)$$

   (b) En déduire que, pour tout réel x,
   $$f(x) \times f(-x) = f(-x) \times f(x) = I$$
   puis que la matrice $I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$ est inversible.
   Exprimer l'inverse de cette matrice en fonction de x, I, A et A^2.

   (c) *Application numérique* :
   Soit la matrice $B = I + 4A + 8A^2$.
   Déterminer la matrice B^{-1} inverse de B.
   La réponse à cette question sera donnée sous la forme $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

EXERCICE II - CALCUL NUMERIQUE

A l'oral d'un examen, chaque candidat est interrogé en 1ère langue où il obtient la note x et en 2ème langue où il obtient la note y (notes sur 20).

Les résultats obtenus par les 100 candidats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

$y \diagdown x$	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20[$
$[0,4[$	2	5	2		
$[4,8[$	1	12	10	3	
$[8,12[$		3	28	12	1
$[12,16[$		1	5	10	2
$[16,20[$				1	2

Pour effectuer les calculs demandés :

- ∘ On supposera que chaque candidat a obtenu la note égale à au centre de la classe correspondante
- ∘ On utilisera impérativement les variables $u = \dfrac{x-10}{4}$ et $v = \dfrac{y-10}{4}$

1. Calculer la moyenne arithmétique $\overline{x}$ et l'écart-type $\sigma(x)$ des notes obtenues en 1ère langue.
   Calculer la moyenne arithmétique $\overline{y}$ et l'écart-type $\sigma(y)$ des notes obtenues en 2ème langue.

2. Calculer la coefficient de corrélation linéaire entre les notes obtenues en 1ère langue et en 2ème langue.

PROBLEME

N.B. Dans la deuxième partie de ce problème

Effectuer un tirage consiste à extraire simultanément deux boules de l'urne;
On fait l'hypothèse d'équiprobabilité à chaque tirage

Première partie

Soit la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{14x^2+4}{5}} \end{array} \right.$

1. Etudier la parité de f.

2. Déterminer les équations des deux asymptotes obliques à la courbe (C) représentative de f et étudier la position de la courbe par rapport à chacune de ses asymptotes.

3. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

4. Soit $G \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2}\sqrt{7x^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln(x\sqrt{7}+\sqrt{7x^2+2}) \end{array} \right.$

   (a) Déterminer le domaine de définition de G et calculer la fonction dérivée de la fonction G.

   (b) En déduire une primitive de la fonction f.

Deuxième partie

I. 1° Deux joueurs A et B sont en présence.
Une urne contient 6 boules; k boules sont noires ($2 \leqslant k \leqslant 4$) et les autres sont blanches.
Le joueur extrait simultanément deux boules.

a) Calculer en fonction de k, la probabilité qu'il tire deux boules noires.

b) Le joueur B lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré, les deux épreuves étant indépendantes.
Calculer la probabilité que B obtiennent deux nombres dont le produit est supérieur ou égal à 9.

2° A et B conviennent de jouer de la manière suivante :
A extrait deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules noires, il gagne et la partie cesse.
Dans tous les autres cas, B lance deux fois le dé. S'il obtient deux nombres dont le produit est supérieur ou égal à 9, il gagne et le jeu cesse. Dans le cas contraire, le tour revient au joueur A dans les conditions identiques à son premier essai, les boules tirées à chaque essai étant remise dans l'urne.

a) Calculer, en fonction de k, les probabilités p_1, p_2 et p_3 que la joueur A gagne à son premier, deuxième ou troisième essai.

b) Calculer, en fonction de k et de n, la probabilité p_n que le joueur A gagne à son $n^{ième}$ essai.

c) Calculer, en fonction de k et de n, la probabilité S_n que le joueur A gagne à l'un quelconque de ses n premiers essais.

d) On suppose que $k = 4$.
Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n > 0,54$.

II. L'urne contenant 4 boules noires et deux boules blanches, le joueur A participe au jeu suivant :

- Si, à son premier essai, il tire deux boules noires, il perd x francs ($x \geqslant 0$);
- Si, à son premier essai, il tire deux boules blanches, il gagne $6x$ francs ($x \geqslant 0$);
- Si, à son premier essai, il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage après avoir remis dans l'urne les boules tirées.

A l'issue de ce second tirage, il gagne a francs s'il tire deux boules noires. Dans les autres cas, la partie cesse et il perd 1 franc.
On désigne par Y la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur A.

1° Donner la loi de probabilité de la variable Y.

2° Calculer, en fonction de a, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y et déterminer a pour que le jeu soit mathématiquement équitable.

3° a ayant la valeur obtenue dans la question précédente, calculer, en fonction de x, l'écart-type $\sigma(Y)$ de la variable aléatoire Y.

4° En utilisant la courbe (C) de la première partie, déterminer GRAPHIQUEMENT l'entier naturel x pour que l'écart-type $\sigma(Y)$ soit compris entre 3 et 4.