ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 2006

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Etudier en discutant selon α l'inversibilité de la matrice P_α. (On utilisera la méthode du pivot).

2. On note Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

   (a) Montrer par une méthode du pivot que : λ est valeur propre de $A \Longleftrightarrow Q(\lambda) = 0$.

   (b) Calculer $Q(1)$. En déduire les valeurs propres de A.

   (c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On définit les triplets $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (4, 2, 1)$.

   (a) Justifier que $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et que $f(\overrightarrow{v_2}) = 2\overrightarrow{v_2}$.
   Déterminer le réel α_0 tel que le triplet $\overrightarrow{v_3} = (\alpha_0, 1, 0)$ vérifie$f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}$.

   (b) Montrer grâce à la question 1 que P_{α_0} est inversible.
   En déduire que la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Vérifier par calcul que $P_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ce résultat servira en question 4.)

   (d) Sans calculer $P_{\alpha_0}^{-1}$, justifier la relation: $A = P_{\alpha_0} T P_{\alpha_0}^{-1}$

   (e) Montrer que pour tout entier naturel n, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :
   $\begin{cases} u_0 = 1\,; \quad u_1 = -1\,; \quad u_2 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$

   (a) On pose, pour tout entier naturel n,$Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que$Y_{n+1} = A\,Y_n$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad Y_n = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$.

   (c) En utilisant la question 3., exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x ..

1. (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.
   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$
   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$
   Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$.
   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel : $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$.
   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leqslant -b \leqslant -1$, $\quad 0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \dfrac{1}{e}(b-a)$.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel k, $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\dfrac{1}{e}\right)^k$.
   (e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.
   (f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant: (où `trunc` désigne la fonction partie entière)
```
program ex2 ;
var N, k :  integer ; epsilon, u :  real ;
begin
writeln ( ' Donnez un reel strictement positif');
readln (epsilon );
N := trunc ( - Ln (epsilon ) ) + 1 ; u ._ -1 ;
for k := 1 to N do .........................  ;
end.
```
   Montrer que l'entier naturel N calculé dans ce programme vérifie : $\left(\dfrac{1}{e}\right)^N \leqslant$ epsilon
   Compléter la partie pointillée de ce programme afin que la variable `u` contienne après son exécution une valeur approchée de α_2 à epsilon près.

3. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$. En déduire $(\ln(2n)) \geqslant n$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,69$).
   (b) En déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$, puis établir $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \\ f(t) = \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de f.
   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.
   On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f. F_X désigne sa fonction de répartition.
2. (a) Déterminer la valeur $F_X(x)$ lorsque $x < 0$, puis lorsque $x > R$.
   (b) Montrer que pour tout réel x de $[0; R]$, $F_X(x) = \dfrac{x^2}{R^2}$.
3. (a) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{2R}{3}$.
   (b) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{R^2}{18}$.
   Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On cherche à estimer le réel R à l'aide de $X_1, X_2, .., X_n$.
4. On note $T_n = \dfrac{3}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on cherche à estimer R avec T_n.
   Montrer que T_n est un estimateur sans biais de R et calculer son risque quadratique noté $r(T_n)$.
5. On note M_n la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables $X_1, X_2, .., X_n$, de sorte que pour tout réel x, $\quad (M_n \leqslant x) = (X_1 \leqslant x) \cap (X_2 \leqslant x) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant x)$.

   (a) Montrer que pour tout réel x, $P(M_n \leqslant x) = (F_X(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\begin{cases} g_n(t) = 2n\dfrac{t^{2n-1}}{R^{2n}} & \text{si } t \in [0; R] \\ g_n(t) = 0 & \text{si } t \notin [0; R] \end{cases}$$

   (c) Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que:

   $$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}R \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2$$

   (d) On cherche à estimer R avec M_n :
   Calculer le biais de M_n, noté $b(M_n)$, et son risque quadratique noté $r(M_n)$.
6. (a) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers ∞ de $b(M_n)$ et $r(M_n)$.
   (b) Quels sont les avantages et les inconvénients réciproques des estimateurs T_n et M_n ?