ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On rappelle que lorsque Y est une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et un écart-type non nul σ_Y, on note Y^* la variable centrée réduite associée à Y définie par $Y^* = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$.
Soit n un entier naturel non nul.
On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suivant la même loi et admettant une espérance notée m et un écart-type strictement positif notée σ.
On pose également $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Enfin on note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. (a) Montrer que S_n admet une espérance et une variance et les exprimer en fonction de n, m et σ.
   (b) En déduire l'expression de S_n^* en fonction de S_n.

   Dans la suite de l'exercice, on pose $p_{n,\beta} = P(|S_n^*| < n^\beta)$, on cherche à étudier la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans différents cas de figure.

2. On suppose $\beta = 0$.
   (a) Montrer grâce au théorème de la limite centrée que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,0} = \Phi(1) - \Phi(-1)$.
   (b) Donner une valeur approchée de cette limite. (On donne $\Phi(1) = 0,8413$).

3. On suppose $\beta > 0$.
   (a) Montrer que $p_{n,\beta} = P(|S_n - nm| < \sigma.n^{\beta+\frac{1}{2}})$
   (b) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev que $p_{n,\beta} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n^{2\beta}}$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On suppose ici $\beta < 0$ et que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suivent une loi normale centrée réduite.
   (a) Quelle est la loi de la variable S_n? de la variable S_n^*?
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n,\beta} = 2(\Phi(n^\beta) - \Phi(0))$.
   (c) Montrer en utilisant la continuité de Φ en 0 que $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n,\beta} = 0$.
   (d) Montrer en utilisant la dérivabilité de Φ en 0 que:

$$p_{n,\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.n^\beta$$

Exercice 2

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général a_n^2 converge.
(Dans cet énoncé on emploi la notation a pour désigner la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels)

1. (a) Montrer que E est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout réel non nul α, on considère la suite $u(\alpha)$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N},: u_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

   Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E.

   (c) Montrer que si a et b sont des éléments de E, alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.

   (d) Soit ϕ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par:

   $$\phi(a,b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

   Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
   On notera alors $\langle a, b\rangle = \phi(a,b)$ et $\|.\|_2$la norme associée à ϕ.

   (e) Montrer que pour toutes suites a et b de E,

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2} \times \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$$

   (f) Déterminer la norme des suites $u(\alpha)$, puis pour α et β deux réels distincts, $\langle u(\alpha), u(\beta)\rangle$.

   (g) Déterminer une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par $u(-1)$, $u(1)$, et $u(2)$.

2. Pour tout entier k non nul, on définit F_k l'ensemble des suites réelles a telles que $\forall n \geqslant k,: a_n = 0$, et G_k l'ensemble des suites réelles a de E telles que $\forall n \leqslant k-1,: a_n = 0$.

   (a) Montrer que F_k est un sous espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k.

   (c) Montrer que G_k est un sous espace vectoriel de E.

   (d) Soit a une suite de E.
   Montrer qu'il existe deux suites r et s telles que $r \in F_k$, $s \in G_k$ et $\forall n \in \mathbb{N},: a_n = r_n + s_n$.
   En déduire que F_k et G_k sont des espaces supplémentaires orthogonaux au sens de ϕ.

   (e) Montrer que la suite $(\dfrac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.
   Déterminer son projeté orthogonal sur F_k.

Exercice 3

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall t \in \mathbb{R}_+, : g(t) = te^{-t}$.

1. (a) Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que pour tout réel strictement positif t, $g(t) \leqslant \dfrac{4}{t.e^2}$.
2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions notées ρ_n et ρ'_n telles que $0 < \rho_n < 1 < \rho'_n$.
3. (a) Montrer que la suite (ρ_n) converge et que sa limite est 0.
   (b) Montrer que $\rho_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite (ρ'_n) est croissante et diverge.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+4y^2}}}{x^2+4y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer, en utilisant la question 1b, que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer les dérivées partielles de f.
   (d) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que (x,y) est un point en lequel f présenta un extremum si et seulement si

$$x^2 + 4y^2 = 1 \text{ ou } (x,y) = (0,0)$$

3. (a) Trouver le minimum absolu de f ainsi que l'ensemble P des points le réalisant.
   (b) Trouver le maximum absolu de f ainsi que l'ensemble E des points le réalisant.
   Indication : *On pourra utiliser l'étude de la fonction g.*
4. On note pour tout entier $n$supérieur ou égal à 3: E_n l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = \dfrac{1}{n}$ et D la demi-droite de $\mathbb{R}^2$ définie par: $\{(x,y), x > 0 \text{ et } y = \dfrac{1}{2}x\}$.
   Montrer que $E_n \cap D = \{(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\rho_n}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho_n}}), (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\rho'_n}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho'_n}})\}$ où ρ_n et ρ'_n sont les valeurs définies dans la **partie I.**