ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 2000

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Partie A

1. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par: $\Phi(x) = \ln x$.
   Vérifier que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \Phi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}.(k-1)!}{x^k}.$$
2. Montrer alors que :
$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (avec $n \geqslant 1$) converge et donner sa somme.

Partie B

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique réelle f par :
$$\begin{cases} f \text{ est périodique de période } 2 \\ \text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f(x) = x.(1-|x| \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $[-1,1]$.
2. Donner les variations de f sur $[-1,1]$.
3. Vérifier que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f(x+n) = (-1)^n f(x)$.
4. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Représenter les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse comprise entre -2 et 3.

Partie C

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose: $u_n = \int\limits_n^{n+1} g(x)dx$.
   En utilisant le changement de variable $t = x - n$ et la question 3. de la partie B, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = (-1)^n . \int\limits_0^1 \frac{f(t)}{t+n} dt.$$
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{1}{6(n+1)} \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{6n}.$$
   La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?
4. (a) Vérifier que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{x(1-x)}{x+n} = -x + (n+1) - \frac{n^2+n}{x+n}.$$
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. En utilisant un développement limité de u_n en $\dfrac{1}{n}$, donner la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus n. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associé le polynôme Q défini par:

$$Q(X) = P(X+1) + XP'(X)$$

Partie A

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Partie B

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
2. (a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que: $f(P_n) = (n+1)P_n$.

   (b) Vérifier que P_n est de degré n.
3. (a) Montrer que: $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(P_n^{(k)}) = (n+1-k)P_n^{(k)}$.

   (b) En déduire que $\left(P_n^{(k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de f.

   (c) Donner la matrice D de f dans cette base.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$. On définit les polynômes E_0, E_1 et E_2 par

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1' = E_0 \quad \text{et} \quad E_1(1) = 2E_1(0) \\ E_2' = E_1 \quad \text{et} \quad E_2(1) = 3E_2(0) \end{cases}$$

1. Expliciter les polynômes E_1 et E_2.
2. Montrer que (E_0, E_1, E_2) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f.
3. Calculer les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que: $P(X+1) + XP'(X) = X^2 + X + 1$.

Exercice 3

p et q désignent deux réels avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère une variable aléatoire réelle X ayant pour loi:

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X=k) = pq^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Justifier l'égalité :
   $$\forall x \in [0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
   En déduire que :
   $$\forall t \in [0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \frac{x^{n+1}}{x-1} dx.$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall t \in [0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \left| \int_0^t \frac{x^{n+1}}{x-1} dx \right| \leqslant \frac{1}{1-t} . \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$
   Prouver alors que :
   $$\forall t \in [0,1[, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t).$$
   (d) Calculer $E(Y)$.
3. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant $(X=k)$ est uniforme sur $[\![0,k]\!]$.
   (a) Pour $z \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(Z = z/X = k)$.
   (b) Déterminer la loi de Z *(chaque probabilité sera laissée sous forme d'une somme)*.
   (c) Calculer $E(Z)$.
4. Soit T une variable aléatoire absolument continue à valeurs dans R_+ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de T sachant $(X=k)$ est exponentielle de paramètre $k+1$.
   (a) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer $P(T \leqslant t/X = k)$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de T.
   (c) Donner alors une densité de T.
   (d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $E(T)$.