ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. On considère dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier $A^3 + A = 0$.

2. (a) Déterminer les valeurs propres de A.

   (b) A est-elle diagonalisable ?

3. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   On pose: $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + e_3$

   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

   (c) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
   Déterminer la matrice de u relativement à C.

EXERCICE II

Première partie

1. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$, l'intégrale $\int\limits_0^1 e^{-u}u^{x-1}du$ est convergente.

   On définit alors sur $\mathbb{R}_+^\times$ la fonction F par $F(x) = \int\limits_0^1 e^{-u}u^{x-1}du$.

2. (a) Calculer $F(1)$, et $F(2)$.

   (b) Exprimer $F(\frac{1}{2})$ en fonction de $\Phi(\sqrt{2})$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

   (c) En étudiant, pour x et x' éléments de $\mathbb{R}_+^\times$, le signe de $F(x) - F(x')$ déterminer le sens de variation de F.

Deuxième partie

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad F(x+1) = xF(x) - \frac{1}{e}$.

2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{1}{ex} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

3. Déduire de ce qui précde :

   (a) les limites de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0.

   (b) un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

   (c) un équivalent de $F(x)$ en 0. (On pourra utiliser l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 1 - u \leqslant e^{-u}$.)

Troisième partie

On considre la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k!(k+x)}$ où $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^\times$.

1. (a) Etablir la convergence de cette série.

   Pour $x \in \mathbb{R}_+^\times$, on note $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!(k+x)}$.

   (b) Calculer $g(1)$.

2. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \left| e^{-u} - \sum\limits_{k==0}^{n} \dfrac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \left| \int\limits_0^1 e^{-u}u^{x-1}du - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \dfrac{1}{k+x} \right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   (c) En conclure que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times$, $F(x) = g(x)$.

EXERCICE III

Soient N un entier naturel non nul et α un réel de $]0,1[$.
On dispose de N boules numérotées de 1 à N, réparties dans deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.
On considre l'expérience $\mathcal{E}$ suivante :

- On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et N,
- si le nombre choisi est k, la boule numérotée k est changée d'urne avec la probabilité α, maintenue dans l'urne qui la contient avec une probabilité $1-\alpha$.

On répète cette expérience $\mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne $\mathcal{U}$ aprs n réalisations de $\mathcal{E}$.

Première partie

Dans cette partie, $N=3$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et on suppose qu'au départ toutes les boules sont dans $\mathcal{U}$.

1. Donner les lois de X_0 et X_1.
2. (a) Pour $r \in \{1,2,3\}$ et $s \in \{2,3\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X_2 = r/X_1 = s)$.
   (b) En déduire la loi de X_2
3. Donner la loi du couple (X_1, X_2). Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

Deuxième partie

Dans cette partie $N=2$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et on suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

1. Exprimer, pour $k \in \{0,1,2\}$ la probabilité $P(X_0 = k)$.
2. (a) Pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$, déterminer $P(X_{n+1} = i/X_n = j)$.
   (b) Vérifier que : $\forall j \in \{0,1,2\}$, $\quad \sum\limits_{i=0}^{2} P(X_{n+1} = i/X_n = j) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer M matrice carrée d'ordre 3, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & b_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ b_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix}$$

   où a_n et b_n seront exprimés en fonction de n (on vérifiera que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_1 = 0$.)
   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.