ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considére les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A\ M = M\ A$.

Partie A

1. (a) Vérifier que B appartient à E.
   (b) Soit n un entier naturel, montrer que A^n appartient à E.
2. Déterminer les réels $x,\ y,\ ,z$ tels que $x\ I + y\ A + z\ B = O$.
   (a) Montrer que E est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec $a,\ b$ et c réels.
   (b) En déduire que toute matrice de E est combinaison linéaire de I, A et B et que E est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) A l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathcal{B} = (I, A, B)$ est une base de E.

Partie B

1. Calculer les valeurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
2. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et exprimer son inverse en fonction de Q.
   (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) En déduire les coordonnées de la matrice A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, dans la base $\mathcal{B}$ de E.

Exercice 2

Soit $I_n = \int\limits_0^1 x^n \ln(1+x)dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

1. Calculer I_0.
2. (a) Montrer que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Etablir que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergnente.
3. (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} \qquad I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \frac{1}{n+2}$$

   et en déduire un encadrement de I_n.

   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 3

Partie A: étude d'une fonction.

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u(t) = \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repére du plan.

1. Vérifier que $u(2\ln 3) = \frac{2}{9}$.

2. (a) Montrer que $u'(t) = \frac{3}{4}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})(3e^{-t/2}-1)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.
   En déduire les variations de u sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{+\infty} u$

   (c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

3. Construire (C) ainsi que (T). On prendra comme unités : 2cm en abscisses et 20 cm en ordonnées.
   On donne : $\ln 3 \simeq 1,1$.

Partie B: étude d'une variable aléatoire.

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes.
On considére les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par:
X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la premiére panne;
X_2 (resp. X_3) est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine aprés la premiére (resp. deuxiéme) panne et la panne suivante.
Aprés la troisiéme panne, l'utilisation de la machine est suspendue.
On suppose que les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent toutes la mÍme loi exponentielle de paramétre $\frac{1}{2}$.

1. (a) Donner une densité de cette loi exponentielle ainsi que la fonction de répartition.

   (b) Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?

2. Exprimer, à l'aide des événements $(X_i \geqslant 2)$ pour $i \in \{1,2,3\}$, l'événement E : "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". En déduire sa probabilité $P(E)$
   On done : $e^{-3} \simeq 0,05$.

3. Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption.

   (a) Que vaut $P(Y \leqslant t)$ pour $t \in \mathbb{R}^-$?

(b) Soit t un réel positif. Justifier l'égalité: $(Y \leqslant t) = (X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t) \cap (X_3 \leqslant t)$

(c) En déduire $P(Y \leqslant t)$ en fonction de t pour $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) Montrer alors qu'une densité de Y sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction u définie dans la partie A.

4. Soit a un réel strictement négatif.

(a) Pour tout réel x, calculer $\int_0^x te^{at}dt$

(b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{at}dt$ converge et donner sa valeur en fonction de a.

5. A l'aide des résultats précédents, montrer que la variable aléatoire Y a une espérance et calculer sa valeur. Exprimer le résultat en heures et minutes.