ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Soit $u_1 = e_1 + e_2$. Calculer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base B. Que peut-on en déduire pour u_1 ?
   (b) En utilisant la méthode de Gauss, montrer que 1 est l'unique valeur propre de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

2. On considre les éléments de $\mathbb{R}^3$: $u_2 = pe_2 + qe_3$ et $u_3 = re_1 + se_3$, où $p, : q, : r, : s$ sont des réels.

   (a) Déterminer u_2 et u_3 pour que :

   $$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

   (b) Vérifier alors que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice A' de f dans la base B'.
   (d) Calculer A'^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie); en déduire A^{-1}.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f.

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leqslant x + 1$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe. Préciser le sens de variation de f.

3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Etudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$. On pourra chercher un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.

4. (a) Montrer que le développement limité à l'ordre 3 de f en 1 est :

   $$f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

   On pourra poser $x = 1 + t$.
   (b) Préciser l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1. Que peut-on dire de T ?
   (c) Construire C et T dans un repre orthonormé.

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 aprs n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du $5^{ième}$ échange ?

2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.

3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   (b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).

4. (a) Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^{\times}$ on a :
   - $P[X_{n+1} = 0] = \frac{1}{6} P[X_n = 1]$
   - Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant 5$,
   $$P[X_{n+1} = k] = \frac{7-k}{6} P[X_n = k-1] + \frac{k+1}{6} P[X_n = k+1]$$
   - $P[X_{n+1} = 6] = \frac{1}{6} P[X_n = 5]$

   (b) En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^{\times}$:
   $$E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1.$$
   (c) Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx.$$

1. Calculer I_1.

2. (a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in [1, e]$: $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.