Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2006

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
   (b) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A\,M = M\,D$

2. (a) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$
   Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$
   (c) Etablir que (U, A) est une base de E.
   (d) Calculer le produit UA. Est-ce que UA est élément de E ?
3. On note $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = A\,M - M\,D$.
   (a) Vérifier que f est linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
   (c) Quelle est la dimension de l'image de f ?
   (d) déterminer les matrice M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
   En déduire que 1 est valeur propre de f.
   Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.
   (e) Est-ce que f est diagonalisable ?
   (f) Montrer que $f \circ f \circ f = f$

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$$

1. (a) Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F.
   (b) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$?
   (c) Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5)$$

   (a) Montrer : $\forall x \in [4; +\infty[, \quad (x-2)(2x-5) \geqslant 4$
   (b) En déduire : $\forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) \geqslant 4x$ et $\varphi(x) \in [4, +\infty.[$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(1+u_n, u_n)$$

   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geqslant 4^{n+1}$
   Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?
   (c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{10}$

4. On note $g : [4, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4; +\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.
   (b) Trouver trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in [4; +\infty[, \quad g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}$$

   (c) Calculer $\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{2}$
   (a) Rappeler une densité de U
   (b) En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $P\left(X^2 \leqslant y\right)$. *On distinguera les cas $y \leqslant 0$ et $y > 0$.*

   (c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$
   Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p.
   on considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

   (a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$