

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 est A .

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A .
2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4 .
(b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de f .
(c) Déterminer la dimension du noyau de f .
(d) Est-ce que f est diagonalisable ?
3. On note $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
(a) Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^4 .
(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base \mathcal{C} de \mathbb{R}^4 .
4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

- (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
- (c) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
- (d) En déduire que f est C^1 sur $[0; +\infty[$.
2. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que: $\forall x \in]0; +\infty[\quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$
- (b) Etudier les variations de la fonction $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par:
- $$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$$
- En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[\quad f''(x) > 0$.
- (c) En déduire le sens de variation de f . On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .
- (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
- (a) Montrer :
- $$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$
- (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.
- (c) Montrer :
- $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$
- (d) Etablir que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.
En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.
- (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; +\infty[, \quad \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.
- (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^x f_n(t) dt = 1$
- (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.
1. Pour tout entier naturel n , on définit la variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient:

$$E(X_n) = n + 1 \quad V(X_n) = n + 1$$

- (b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes:

$$\int_0^4 f_4(t) dt \simeq 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t) dt \simeq 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t) dt \simeq 0,90$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4 .

Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leq 8)$.

- 3.** Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t .

On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t .

- (a) Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t .
Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n , prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ième}}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.
- (b) Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'égalité de l'événement $(Z_n \leq t)$ et de l'événement $(Y_t \geq n)$
- (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n .
- (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

- FIN -