Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1997

MATHEMATIQUES

3ème épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Soient a, b, c trois reels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer $M^2 = 3M$
   (b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0, 3\}$.
2. (a) Détermmer les valeurs propres de M et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espaces propre associe.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}$$

3. (a) Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?
   (b) Vérifier : $M = PDP^{-1}$
4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$
5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{array}$

1. (a) Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

   (b) Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et établir que} \quad \left\{ \begin{array}{r} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{array} \right.$$

   (c) Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

2. On note $g : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1+e^x} \end{array}$

   (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0, et que $\dfrac{1}{2} < x_0 < 1$

   (b) Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

   (c) Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0.

   (d) i. Montrer : $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0,125$, où g' désigne la dérivée de g.

   ii. Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leqslant (0,125)^{n-1} \cdot 0,5$

   iii. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.

   iv. Montrer que $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Exercice 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à p , $p \in]0; 1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de " 6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/Z = n)$. On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

   - si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = C_n^k C_N^n \cdot p^k \left(1 - p\right)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = 0$

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}$$

   En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \dfrac{p}{6})$.

   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

   Déterminer la loi du couple (X, Y).

8. En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).