Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1982

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota: les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

On désigne par E l'espace vectoriel sur des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que E est de dimension 3 et que les trois polynômes 1, X, X^2 en constituent une base que l'on notera B.
On considère l'application φ, de E dans E, définie par

$$\varphi : P \mapsto \varphi(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P.$$

P' désignant le polynôme dérivé de P.

1. Démontrer que φ est une application linéaire de E dans E.
2. Ecrire la matrice A de φ relative à la base B.
3. Déterminer les valeurs propres de φ. En déduire que φ est un isomorphisme.
4. Déterminer les sous-espaces propres de φ et montrer que φ est diagonalisable.
5. Déterminer une base B' de E dans laquelle la matrice A' de φ est diagonale.
   Ecrire la matrice de passage M de la base B à la base B' et la relation entre les matrices A, A', M et M^{-1}.
6. (a) Déduire de 5) la relation
   $$A^k = M(A')^k M^{-1}, \qquad k \in .\mathbb{N}^\times$$
   (b) Application: déterminer $\varphi^k(1)$, k $\in \mathbb{N}^\times$, sachant que $\varphi^k = \varphi^{k--1} \circ \varphi$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$

1. (a) Etudier la fonction f et donner sa courbe représentative.
   (b) Montrer que
   $$\text{si } |x| \geqslant 2, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}.$$
2. Montrer qu'il existe un nombre L unique tel que $f(L) = L$ et que $2 \leqslant L \leqslant 2 + \dfrac{1}{4}$
   (on pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$).

3. Soit un réel $x \geqslant 2$. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction f sur $[x, L]$ ou $[L, x]$, montrer que
$$|f(x) - L| \leqslant |x - L| .$$
4. On considère la suite $n \mapsto u_n$ définie par $u_0 \neq 0$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in .\mathbb{N}$
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n > 2$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $|u_{n+1} - L| \leqslant |u_n - L|$.
   (c) En déduire que, quel que soit $u_0 \neq 0$, la suite $n \mapsto u_n$ converge vers L.

Exercice 3

Introduction: on s'intéresse à la transmission d'une information binaire, c'est-à-dire ne pouvant prendre que deux valeurs.
On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité p, et donc l'autre valeur avec la probabilité $q = 1 - p$.
Dans tout le problème, p est supposé connu et vérifie : $0 < p < 1$.

1. On considère des individus successifs i_0 , i_1 , ... , i_n , $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
   L'information émise par i_0 est transmise à i_1, qui transmet la valeur reçue à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.
   Entre deux individus i_k et i_{k+1} , $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.
   On note p_k , $k \in \{1, ..., n\}$, la probabilité que la valeur de l'information recue par i_k soit identique à celle émise par i_0 , et on pose $p_0 = 1$.
   (a) Trouver la relation liant p_{k+1} et p_k , $k \geqslant 0$ (attention : i_{k+1} peut recevoir la valeur émise par i_0 même lorsque i_k a reçu l'autre valeur ...).
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.
   (c) Calculer p_n. Que conclure ?
2. Dans cette question, l'individu i_0 émet l'information à destination directe (c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'autres individus) d'une infinité d'individus $\{i_k\}$, dont une partie se trouve «à l'écoute».
   Le nombre X d'individus à l'écoute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Entre i_0 et chacun des individus à l'écoute, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.
   (a) Lorsque n individus sont à l'écoute, quelle est la probabilité pour qu'ils soient k , $0 \leqslant k \leqslant n$, à recevoir la valeur de l'information émise par i_0, et donc $n - k$ à recevoir l'autre valeur ?
   (b) Exprimer en fonction de p et λ la probabilité pour qu'aucun individu ne reçoive la valeur de l'information émise par i_0 (c'est-à-dire qu'aucun individu n'est à l'écoute, ou que tous les individus à l'écoute reçoivent l'autre valeur d'information).
   (c) Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'individus recevant la valeur de l'information émise par i_0.
   Montrer que la loi de probabilité de Y est une loi de Poisson de paramètre λp.
   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$, espérance mathématique et variance de Y.

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose :
$$u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1 + \tan x} dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\pi/n} \frac{x}{1 + x} dx$$

1. Calculer v_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.
2. (a) Montrer que, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$0 \leqslant \sin x \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x \leqslant \tan x.$$

   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
3. Etudier la convergence de la série de terme général v_n , puis de la série de terme général u_n.

FIN