EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x]+1$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (Y = k) \Leftrightarrow (k \leqslant X < k+1)$.

1. (a) Montrer que Y prend des valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^{\times}$, calculer $P(Y = k-1)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'évènements $(Y = k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :
   $$\forall x \in [0;1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1-e^{\lambda x}}{1-e^{\lambda}}.$$
   (c) En déduire une densité f de Z.
   (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant "*pile*" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "*face*" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaine une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "*pile*", cette suite devant être suivie d'un "*face*" ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout k de $\{1, .., n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaines de "*pile*" obtenues au cours de ces n lancers.
Pour tout k de $\{1, .., n\}$, on pourra noter P_k l'évènement "on obtient "*pile*" au $k^{ème}$ lancer"
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $\{1, .., n\}$, l'espérance de Y_k, noté $E(Y_k)$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.

2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.

3. Dans cette question, k désigne un élément de $\{1, .., n-2\}$.
   Pour tout i de $\{1, .., n\}$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaine de "*pile*" commence au $i^{ème}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

   (a) Calculer $P(X_{i,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in \{2, .., n-k\}$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.
   (c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & \forall x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1. (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Etudier le signe de $f(x)$.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-xh(x)}{1+x^2}$.
   (b) Etudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0,48$).
   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

(a) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0;1]$.

(b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
   (c) Donner la dimension de E.

2. (a) Montrer, en les calculant explicitement que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E.
   (b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
   (c) Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

3. (a) Montrer que L est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4. On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que u_1, u_2, u_3, u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3$ et 4 de telle façon que les cotés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$

1. (a) Ecrire la matrice A, carré d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i/X_n = j)$.

   (b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

   (a) Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer Au_i. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P.

   (b) Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales que $C_{n+1} = AC_n$.

   (b) En déduire que $C_n = \frac{1}{4} PD^n PC_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.