EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1. On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\times$ par $g(x) = \ln x + 2x + 1$
   (a) Etudier les variations de g et donner les limies de g en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, \frac{1}{e}[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \qquad f(x, y) = x(\ln x + x + y^2)$$
   (a) Déterminer le seul point critique de f, c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
   (b) Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.
   (c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$

Exercice 2

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considére l'endomorphisme f_a de E défini par :
$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Déterminer une base de Im f_a.

(b) Montrer qu'une base de $\ker f_a$ est $(e_2,\ e_1 - e_3)$.

2. Ecrire la matrice de f_a dans $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$

3. On pose $e'_1 = f_a(e_1) \quad e'_2 = e_1 - e_3 \quad e'_3 = e_3$

   (a) Montrer que $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.
   (c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. A est-elle inversible? A est-elle diagonalisable?

4. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI$, I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer sans calcul que $B(x)$ est inversible.
   (b) Calculer $(A - xI)(A + xI)$ puis écrire $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I et A.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I et A.

Exercice 3

On réalise une suite de lancers d'une piéce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité 1/2.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer".
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.

   (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modéle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.
   (c) Déterminer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.

2. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c: par une autre méthode.

   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que:

$$\forall k \geqslant 3 \qquad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$$

   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

3. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Probléme

La partie I permet d'établir des résultats utiles pour les parties II et III.
Les parties II et III sont indépendantes entre elles.
On considére le fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

Partie I

1. (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x) \leqslant x \qquad$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x:

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$

   (b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Partie II

On considére la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in]0, 1]$
   (b) Montrer, grâce à la question I 1), que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n - u_{n+1} \geqslant 0$
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2. (a) Simplifier, pour tout n élément de $\mathbb{N}^\times$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.
   (b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.
   (c) En utilisant la question I 2), montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ en $+\infty$.
   (d) Donner enfin la nature de la série de terme général u_n^2.

Partie III

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_\times^+, \qquad \phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   On considére la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_\times^+, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x} \int\limits_0^x \phi(t) dt$.

   (a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_\times^+$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_\times^+ \qquad 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.
   (c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[\qquad \int\limits_1^x \phi(t) dt \leqslant \ln x$.
   (b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

3. (a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$
   (b) Montrer alors que $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$
   (c) Etudier la fonction notée k définie par :$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad k(x) = (x+1)e^{-x} - 1$
   (d) Donner le signe de k, puis les variations de g et enfin celles de g.
   (e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repére orthonormé.