EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)t$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2. (a) Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.
   (b) En déduire que Δ n'est pas surjective.
3. Montrer que Δ est injective.
4. On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.
   (a) Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)e^{-\dfrac{x}{\lambda}}$ est constante.
   (b) Déterminer alors $\Delta(f)$.
5. Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.
6. Pour toute fonction f de E, on pose: $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ F_n = \Delta(F_{n-1})$.

(a) Montrer que F_n est de classe C^{n+1}.

(b) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int\limits_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1. On considère la fonction g définie par $\left\{ \begin{array}{lcll} g(t) & = & \dfrac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ g(0) & = & 0 & \end{array} \right.$

   (a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que: $\lim\limits_{x \to 0} \int\limits_x^{2x} g(t)dt = 0$.

   (c) En déduire que f est continue en 0.

2. Montrer que f est paire.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

   (b) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

   (c) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

   (d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4. (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ |f(x)| < \frac{1}{2x}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. (a) Montrer que $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

   (b) Montrer que $f(2\pi) = \int\limits_{2\pi}^{3\pi} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}) \sin(t)dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

   (c) Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$ ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 3

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$; A est donc une matrice de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.
On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: B est donc une matrice de $\mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1. Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. (a) Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

   (b) Montrer que $\dim \operatorname{Im} g \leqslant 2$.

   (c) Déduire des questions précédentes que $\dim \operatorname{Im} g \circ f \leqslant 2$.

   (d) Conclure que $g \circ f$ n'est ni surjective, ni injective.

3. En déduire une valeur propre de BA.

   On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

   (a) Montrer que $BX \neq 0$.

   (b) Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est valeur propre de BA.

   (c) En déduire que BA est diagonalisable.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

Partie 1

Une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, étant définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A étant un événement de $\mathcal{A}$, de probabilité non nulle, on définit la variable aléatoire $T = Z/A$ (Z sachant que A est réalisé) par : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(T = k) = P([Z = k]/A)$.
On considère un événement A vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.
Montrer que si Z a une espérance, alors Z/A et $Z/\overline{A}$ ont aussi une espérance et que:

$$E(Z) = P(A)E(Z/A) + P(\overline{A})E(Z/\overline{A})$$

Partie 2

On dispose de deux urnes, U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, un nombre compris entre 1 et $2n$, puis à transférer la boule portant le numéro choisi, de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre urne. Pour tout entier k élément de $[\![0, 2n]\!]$, on dit que U est dans l'état E_k lorsque U contient k boules et on dit que U accède à l'état E_k, lorsque U contient k boules **pour la première fois**.
On note X_k, la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que U accède à l'état E_k et égale à 0 si l'état E_k n'est jamais atteint.
On admettra que X_k a une espérance, notée m_k.
Enfin, pour tout entier j, élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$.
Le but de cette partie est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_k, c'est-à-dire d'évaluer le nombre m_k.

1. Montrer que X_0 et X_1 sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.

2. (a) Donner, pour tout j élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, une interprétation de la variable N_j.

   (b) Montrer que N_j a une espérance que l'on notera μ_j dans la suite.

3. Soit j un élément de $[\![1, 2n-1]\!]$.

   (a) Soit A_j l'événement : "U accède à l'état E_{j+1}, depuis l'état E_j, en une seule épreuve".
   Calculer $P(A_j)$.

   (b) Montrer que N_j/A_j est la variable certaine égale à 1 et que $N_j/\overline{A_j} = 1 + N_{j-1} + N_j$.

   (c) Montrer, en utilisant la partie 1, que: $\forall j \in [\![1, 2n-1]\!] \quad \mu_j = \dfrac{2n + j\mu_{j-1}}{2n - j}$.

   (d) En déduire que: $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!], \quad \mu_j = 2n \int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j dx$

4. Soit k un élément de $[\![1, 2n]\!]$.

    (a) Ecrire, en la justifiant, la relation liant X_k et $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$.

    (b) En déduire la relation liant m_k et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$.

    (c) Vérifier que: $\forall x \neq 1, \quad \sum\limits_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = x^{2n-k}\dfrac{x^k-(2-x)^k}{2(x-1)}$.

    (d) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^1 x^{2n-k}\dfrac{x^k-(2-x)^k}{2(x-1)}dx$ est convergente.

5. En déduire que: $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ m_k = n\int\limits_0^1 (1-t)^{2n-k}\dfrac{(1+t)^k-(1-t)^k}{t}dt$.

Partie 3 : étude de deux cas particuliers.

1. Evaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_n, c'est-à-dire pour que, pour la première fois les urnes U et V contiennent le même nombre de boules.

    (a) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^1 \dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t}dt$ converge et vaut $\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k}$ (on pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique).

    (b) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^1 \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t}dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

    (c) En déduire alors que : $m_n = n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$.

2. Evaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_{2n}, c'est-à-dire pour que, pour la première fois l'urne V soit vide.

    (a) Pour tout entier naturel p, on pose $I_p = \int\limits_0^1 \dfrac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}dt$.
    Vérifier que I_p est une intégrale convergente puis calculer $I_p - I_{p-1}$.

    (b) En déduire que $m_{2n} = n\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{2^k}{k}$.