EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_n(x) = x - n.\ln(x).$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n \times \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad n.\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad, n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \ln(n)$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{C_{n+p}^{n}}$,où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général $u_n$diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n + p + 2)\, u_{n+2} = (n + 2)\, u_{n+1}$.
   (b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)\, u_{n+1})$
3. (a) On pose $v_n = (n + p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
   (c) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.
   (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty, \quad u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$
   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.
5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p,la somme de la série de terme général u_n

Exercice 3

I désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
On définit alors les matrices suivantes :

- $\exp(M) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k$, avec la convention $M^0 = I$
- $\ln(I + M) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k$

On considère l'enemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1. (a) Montrer que E est un espace vatoriel de sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.
   (b) Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   (c) Montrer qye toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

   Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E.
2. (a) calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.
   (b) Exprimer $\exp(A)$ et $\ln(I + A)$ en fonction de I et de A.
3. Montrer que $\ln[\exp(A)] = A$
4. (a) Vérifier que $\ln(I + A)$ appartient à E.
   (b) Montrer que $\exp[\ln(I + A)] = I + A$
5. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad \exp(m\, A) = [\exp(A)]^m$
6. Montrer que $\exp(A)$ est inversible etque sont inverse est : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$
7. Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$?

Problème

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I

On effectue $2n$ tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que $N(\Omega) = [[2, n+1]]$.

2. Montrer que $\forall k \in [[1, n]], \quad p\left(N > k\right) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$
   Rappel : A_n^k désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.

3. (a) Montrer que : $\forall k \in [[2, n]], \quad p(N = k) = p(N > k-1) - p(N > k)$.
   (b) Calculer $p(N = n+1)$ puis en déduire la loi de N.

4. Montrer que l'espérance $E(N)$ de la variable aléatoire N est : $E\left(N\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A_n^k}{n^k}$

Partie II

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^{\times}$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}_+$.
On pose, pour tout réel x positif, $\varphi\left(x\right) = \int\limits_0^x t\, f\left(t\right)\, dt$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi\left(x\right) = \int\limits_0^x \left[1 - F\left(t\right)\right]\, dt - x \times P\left(X > x\right)$$

2. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int\limits_0^x \left[1 - F\left(t\right)\right]\, dt$ converge.

   (a) Calculer $\varphi'\left(x\right)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant x \times P\left(X > x\right) \leqslant \int\limits_x^{+\infty} t\, f\left(t\right)\, dt$
   (d) En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_x^{+\infty} t\, f\left(t\right)\, dt = 0$

   En déduire $\lim\limits_{x \to \infty} x\, P\left(X\right)$, puis montrer que : $E\left(X\right) = \int\limits_0^{+\infty} \left[1 - F\left(t\right)\right]\, dt$

Partie III

On considère la fonctionF_n définie par : $\begin{cases} F_n\left(x\right) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F_n\left(x\right) = 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que F_n est la fontion de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int\limits_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

(b) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$ puis donner la valeur de I_k.

3. En déduire , en utilisant la partie **II**, que T_n a une espérance etque $E(T_n) = E(N)$.

Partie VI

On considère la déclaration de fonction suivante , rédigée en TurboPascal :

```
function f(p,q : integer) : real;
var j : integer; z : real;
begin
     if (p<=0) or (q<0) then write('valeurs incorrectes')
     else
     begin
          z : =1;
          for j : =1 to (q-1) do z : =z*(1-j/p)
          f : =z;
     end;
end;
```

1. Montrer que si p est un entier naturel non nnul et si q est un entier naturel alors $f(p,q) = \dfrac{A_p^q}{n^q}$

2. Utiliser cette déclaration pour écrire un algorithme en TurboPascal donnant la valeur commune de $E(N)$ et $E(T_n)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.