EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique, économique et technologique

Année 1987

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

ALGEBRE: EVOLUTlON D'UN MARCHE :

Trois entreprises (numérotées 1, 2 et 3) vendent un produit et sont directement en concurrence sur ce produit. La répartition des ventes entre les entreprises évoluent d'une période à l'autre. Pour mesurez cette répartition, on calcule les parts de marché.. Parts de marché si

- l'entreprise N°1 vend 200 produits
- l'entreprise N°2 vend 125 produits
- l'entreprise N°3 vend 175 produits

il y a 500 produits vendus et les pars de marché respectives seront de :

- entreprise N°1 : 200/500 = 0,4
- entreprise N°2 : 125/500 = 0,25
- entreprise N°3 : 175/500 = 0,35

Les parts de marché de la période n seront notées $p_1(n)$, $p_2(n)$ et $p_3(n)$. La période initiale sera la période 0. D'une période à l'autre, les parts de marché évoluent par le jeu de coefficients d'absorption $a_{i,j}$ (i et j indices d'entreprises).
Coefficients d'absorption: En prenant les parts de marché précédentes, $a_{1,2} = 0,6$ signifie que 60 % du marché de l'entreprise N°2 va revenir à l'entreprise N°1 , en l'occurrence 60% de 25% du marché total.
Enfin, on supposera que d'une période à l'autre, les coefficients d'absorption ne varient pas.
Le but du problème est d'étudier l'évolution des parts de marché.

1. Montrer que $\forall j \in \{1,2,3\}, \qquad a_{1,j} + a_{2,j} + a_{3,j} = 1$

2. Etablir l'égalité suivante $\begin{pmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{pmatrix}$ où A est la matrice (3,3) de terme général $a_{i,j}$

3. (a) Etablir l'égalité suivante $\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{pmatrix}$

   (b) Montrer que $\forall j \in \{1,2,3\} \qquad a(n)_{1,j} + a(n)_{2,j} + a(n)_{3,j} = 1$ où $a(n)_{i,j}$ est le terme général de la matrice A^n

   (c) Que représente les termes $a(n)_{i,j}$?

   Dans ce qui suit, on supposera que A est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont simples et différentes de -1

4. Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A

5. Montrer que les autres valeurs propres sont en valeur absolue, strictement inférieures à 1

6. En déduire l'évolution des parts de marché à long terme.

PROBABILITE : THEORIE DES TESTS (Option générale)

On dispose de deux machines A et B. Chaque machine a pour fonction de générer un nombre sur un écran. On peut considérer que les nombres générés par chacune d'elle sont des réalisations d'une variable aléatoire normale. On suppose de plus que les réalisations successives d'une machine sont indépendantes.
On note X_A la variable aléatoire générée par la machine A. L'espérance de X_A est égale à 4 et son écart-type égal à 1.
On note X_B la variable aléatoire générée par la machine B. L'espérance de X_B est égale à 4,5 et son écart-type égal a 1.
Un animateur choisit au hasard, l'une des deux machines. Puis il génère 100 valeurs à l'aide de cette machine, dont il calcule la moyenne notée X.
11 communique la valeur de X à un joueur qui ne sait pas quelle machine a été choisie.
Le but du joueur est dans la mesure da possible de trouver la machine qui a été choisie, en connaissant la valeur de X.

1. (a) Montrer que pour toute valeur de X, le joueur ne peut affirmer avec certitude quelle machine a été choisie.

   (b) Quelle est la loi de X si la machine A a été choisie ?

   (c) Quelle est la loi de X si la machine B a eté choisie ?
   (Rappel toute combinaison linéaire de variables normales indépendantes est une variable normale)

2. Le joueur décide de parier sur l'une des deux machines en adoptant une certaine règle.
   On définit les éléments suivants :

D_A le joueur parie sur A	D_B le joueur parie sur B
R_A l'animateur a choisi A	R_B l'animateur choisit B

   On définit les probabilités suivantes : $p_1 = P_{R_A}(D_B) \qquad p_2 = P_{R_B}(D_A)$

   (a) Que représente p_1 et p_2 ?
   Le joueur décide d'adopter la règle (1) suivante :
   Il se donne un réel p compris entre 0 et 0,05. Puis il cherche x tel que $P_{R_A}(X > x) < p$ et $P_{R_B}(X < x)$ la plus petite possible
   Si la valeur X donnée par l'animateur est supérieure à x, le joueur parie sur B, sinon sur A.

(b) Que vaut x si $p = 0,05$? (on justifiera le calcul)

(c) Que vaut p_1 et p_2 pour $p = 0,05$?

3. Le joueur décide maintenant d'adopter la règle (2) suivante :
Il se donne un nombre réel p compris entre à et 0,05. Puis il cherche x tel que $P_{R_A}(X < x) < p$ et $P_{R_B}(X > x)$ la plus petite possible?
Si la valeur de X donnée par l'animateur est supérieure à x, la joueur parie sur A, sinon sur B.

   (a) Montrer que pour la même valeur de p, la valeur p_2 est plus grande quand le joueur applique la règle (2) plutôt que la règle (1).

   (b) Si vous aviez à choisir l'une des deux règles, laquelle choisirez - vous t pourquoi ?

4. En revenant à la règle (1) et pour la valeur de p donnée, que pourrait demander le joueur à l'animateur pour diminuer la valeur de p_2 ?
Table de valeur de la fonction de répartition de la loi normale donnée.

PROBABILITES : JEU A SOMME CONSTANTE (Option Economique Technologique)

Deux joueurs (nommés A et B) jouent l'un contre l'autre. Chaque joueur possède deux jetons au départ. Le jeu se déroule de la façon suivante :
Le jeu est décomposé en une succession d'épreuves indépendantes. Pour une épreuve, chaque joueur mise un jeton. Il y a un gagnant et un perdant à la fin de chaque épreuve, le gagnant ramasse la mise. le jeu se termine quand l'un des joueur n'a plus de quoi miser. A chaque épreuve, le joueur A a une probabilité p (p fixé) de remporter l'épreuve.
On note JA_i la variable aléatoire donnant le nombre de jetons que possède A à la fin de l'épreuve n° i.
On note G_A l'événement "A gagne le jeu "

1. (a) Décrire, sous forme d'un arbre, les différentes valeurs possibles de JA_i à la fin des épreuves 1 et 2. On affectera dans cet arbre les probabilités correspondantes

   (b) Montrer que $P_{JA_2=2}(G_A) = P(G_A)$

   (c) En déduire la valeur de $P(G_A)$

2. (a) On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'épreuves jouées sachant que le joueur A gagne le jeu. déterminer la loi de X

   (b) On note Y la variable aléatoire donnant le nombre d'épreuves jouées ne sachant pas quel gagne joueur le jeu. déterminer la loi de Y

3. Refaire le calcul de $P(G_A)$, en accordant en début de jeu, un jeton au joueur A et trois jetons au joueur B

ANALYSE : PROGRAMMATION LINEAIRE

Soient L un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul. On définit l'ensemble $D(n, L)$ par

$$D(n, L) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } a_1 + a_2 + \cdots + a_n = L \text{ et } a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0 \ldots a_n \geqslant 0\}$$

De même, on définit $S(n, L)$ par :

$$S(n, L) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in D(n, L) \text{ tel que:} \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(n, L), a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \leqslant b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n\}$$

Le but du problème est de trouver le ou les éléments de $S(n, L)$. Pour chercher ce ou ces éléments, nous allons d'abord montrer que ce problème se ramène à la recherche de n maxima de fonctions numériques. puis on en déduira le résultat.

1. Cas particulier $n = 2$.

   (a) Reformuler le problème, en supprimant du produit les inconnues a_2 et b_2.

   (b) Trouver le ou les éléments de $S(2, L)$.

2. Cas général : n quelconque supérieur ou égal à 1.

   (a) Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un élément de $S(n, L)$.

      i. Montrer que b_i est strictement positif pour tout élément de $(1, 2, \ldots, n)$.

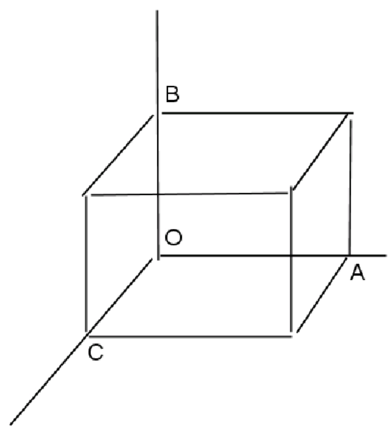
      ii. Montrer que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est un élément de $S(n - 1, L - b_n)$.

   (b) En déduire, en raisonnant par récurrence que $S(n, L)$ est réduit au seul élément $(L/n, L/n, \ldots, L/n)$

Option générale seule

3. On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthogonal $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ tel que : $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = 3$
($\|\overrightarrow{V}\|$ désigne la norme classique c.a.d $\|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ où x, y et z sont les coordonnées de V).

   (a) O, A, B et C déterminent un parallélépipède (Cf figure). montrer que le parallélépipède de plus grand volume est celui correspondant à un repère orthonormé



   (b) généraliser le résultat précédent à $\mathbb{R}^n$