EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

A) La difficulté de tous les problèmes est progressive.

   Pour démontrer votre faculté de raisonnement mathématique nous vous conseillons de traiter en priorité un problème le plus complétement possible, plutôt que de traiter des questions éparses dans tous les problèmes.

B) Pour résoudre une question d'un problème, vous pouvez, si vous l'estimez nécessaire, utiliser les résultats des question précédentes, même si vous ne les avez pas résolues.

C) Les questions notées • en marge, sont considérées comme étant difficiles.

PROBLEME D'ANALYSE : RECHERCHE D'UN OPTIMUM

En général, quand on veut trouver un optimum d'une fonction, on utilise la condition nécessaire d'annulation de la dérivée.

Cette condition n'est malheureusement pas toujours vérifiée. Nous allons trouver une méthode permettant de retrouver cette dernière.

Cette méthode s'applique surtout aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour des problèmes d'optimisation sous containtes. L'étude des fonctions à plusieurs variables n'étant pas au programme, nous donnerons ici le principe pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Déterminer le maximum et le minimum de cette fonction sur $[1, 2]$ et vérifier que, pour ces minimum et maximum, la dérivée n'est pas nulle.

H1 Dans le reste du problème (a, b) sera un couple de réels avec $a < b$ et f une fonction définie continue et dérivable sur $[a, b]$.

2. Rappeler brièvement pourquoi f admet au moins un maximum global et un minimum global.

A) RECHERCHE D'UN MINIMUM
On fait pour questions allant de 3 à 8 l'hypothèse supplémentaire suivante :

H2 $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(b) \leqslant 0$
nous allons prolonger f sur $\mathbb{R}$ et nous nommerons $\overline{f}$ la fonction définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \overline{f}(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{e^{1/n}-1}\left((x-a)e^{1/n} + e^{a-x} - 1\right) & \text{si } x < a \\ \overline{f}(x) = f(x) & \text{si} a \leqslant x \leqslant b \\ \overline{f}(x) = f(b) + \dfrac{f'(b)}{e^{1/n}-1}\left((x-a)e^{1/n} - e^{x-b} + 1\right) & \text{si } x > b \end{array} \right. \end{array} \qquad n \text{ entier naturel}$$

3. Montrer que $\overline{f}$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $\overline{f}$ est continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

5. Montrer que :

   (a) $f'(a) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \overline{f}(x) = +\infty$

   (b) $f'(b) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \overline{f}(x) = +\infty$

6. Déduire que $\overline{f}$ admet au moins un minimum global et que ce minimum a une dérivée nulle.

7.

   (a) Dessiner une fonction f (sans en préciser la formule) sur un intervalle $[a, b]$ (sans donner de valeurs précises à a et b) vérifiant les hypothèses H1 et H2.

   (b) Faites l'étude de la fonction $\overline{f}$ pour $x \leqslant a$ et $x \geqslant b$.

   (c) Représenter graphiquement $\overline{f}$.

8. On note E l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \overline{f}'(x) = 0\}$ et x_0 un minimum global de f définie sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe x élément de E tel que $|x - x_0| \leqslant 1/n$.

9. Que proposez-vous pour $\overline{f}$ si $f'(a) \leqslant 0$ et $f'(b) \geqslant 0$?

B) RECHERCHE D'UN MAXIMUM
On prend comme nouvelle l'hypothèse
H3 $f'(a) \leqslant 0$ et $f'(b) \geqslant 0$

10. Proposer une fonction $\overline{f}$ permettant de trouver un maximum global de f approché à $1/n$ près.

C) AMELIORATION DE LA SOLUTION
Proposer une fonction $\overline{f}$ permettant de trouver un optimum non plus à $1/n$ près mais à $1/n^2$ près.

PROBLEME DE PROBABILITE : THEORIE DE L'INFORMATION

Nous avons tous été amenés, pour obtenir un renseignement, à poser des questions de type dichotomique (c'est-à-dire : réponses possibles oui ou non).

La théorie de l'information traite ce genre de problème, et plus précisément : "Combien de questions de type dichotomique faut-il poser, pour obtenir une information".

Précisons que cette théorie est d'une utilité certaine pour quantifier l'information en statistiques.

Nous formaliserons le problème sous forme de jeu. Nous disposons de k boîtes numérotées de 1 à k (k entier naturel strictement positif). Un objet est placé au hasard dans l'une de ces boîtes (l'objet a une probabilité $1/k$ d'être dans l'une des boîtes). Un animateur sait dans quelle boîte est placé l'objet et vous devez retrouver l'objet en lui posant un minimum de questions de type dichotomique.

L'objet des parties A, B, C, D n'est pas de trouver la façon optimale de poser des questions (ce qui vous est précisé dès la question 1) mais de compter le nombre de questions à poser pour chaque valeur de k.

Dans le reste du problème, on note X_k le nombre de questions posées pour trouver l'objet et Y le numéro de la boîte cherchée.

A) k EST UNE PUISSANCE DE 2.

1. $k = 16$

QUESTION n° 1

$\underline{Y \text{ est-il inférieur ou égal à 8 ?}}$

↙ ↘

Réponses possibles: oui — non

QUESTION n° 2

↙ ↘

Y est-il inférieur ou égal à 4 ? — Y est-il inférieur ou égal à 12 ?

↙ ↘ — ↙ ↘

Réponses n° 2: oui — non — oui — non

On réitère l'opération, en découpant chaque fois en deux parties égales.

- Montrer que X_{16} est toujours égal à 4.

2. $k = 32$.

- En opérant de façon analogue, et en utilisant la question précédente, montrer que X_{32} est toujours égal à 5.

3. $k = 2^n$ (n entier naturel strictement positif).

- En posant toujours les mêmes questions, montrer par récurrence que X_k est toujours égal à n.

B) k QUELCONQUE

4. $k = 17$

- Le découpage, pour déterminer les questions à poser à l'animateur, se fera à chaque étape de la façon suivante :
- Si le nombre de boîtes restantes est pair, on partage en deux parties égales comme précédemment. Si le nombre est impair, on partage comme précédemment en deux parties en mettant systématiquement une boîte de plus dans la deuxième partie. (ex. : si Y est compris entre 9 et 17, la première partie sera formée des boîtes 9, 10, 11, 12 et la deuxième partie sera formée des boîtes 13, 14, 15, 16, 17). La question posée à l'animateur sera donc :

Y est-il inférieur ou égal à 12 ?
X_{17} est une variable aléatoire où Ω est l'ensemble des numéros de boîtes possibles (c'est-à- dire $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 16, 17\}$).

(a) Montrer que X_{17} peut prendre deux valeurs.
(b) Trouver la loi de X_{17}.

5. Résoudre la question précédente avec :

$$k = 18 \qquad k = 19 \qquad k = 20 \qquad k = 21$$

6. On note a_k le nombre de cas où l'on pose 4 questions et b_k, le nombre de cas où l'on pose 5 questions et on suppose $16 < k < 32$.

(a) Etablir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - 1 \\ b_{k+1} &= b_k + 2 \end{aligned}$$

(b) En déduire $E(X_k)$ en fonction de k.

7. En s'inspirant des questions précédentes, trouver pour toutes valeurs de k, la loi et l'espérance de X_k.

C) INFORMATION APPORTEE PAR LA CONNAISSANCE D'UN CRITERE
On suppose maintenant en plus, que les boîtes sont peintes dans des couleurs différentes.

On notera E_j l'ensemble des boîtes peintes avec la $j-$ième couleur ($j \in \{1, 2, \ldots, q\}$) et p_j le nombre $\dfrac{\text{card}(E_j)}{k}$

Vous connaissez la couleur de toutes les boîtes et le jeu se passe de la façon suivante:

L'animateur place au hasard l'objet dans l'une des boîtes, puis vous précise la couleur de cette boîte.

8. On note $X1_k$ le nombre de questions posées avec cette nouvelle règle.

(a) Que représente $X_k - X1_k$.
(b) Calculer $E(X_k - X1_k)$.

D) UN JOUEUR RECHERCHE SIMULTANEMENT PLUSIEURS OBJETS.
On ne vous propose plus de rechercher un objet placé dans l'une des k boîtes, mais de rechercher r objets. Pour cela, l'animateur dispose de r paquets de k boîtes, le premier objet est placé au hasard dans l'une des boîtes du premier paquet, le deuxième dans l'une des boîtes du deuxième paquet, etc ... Une première façon de jouer consiste à rechercher le premier objet,puis le deuxième objet et ainsi de suite.

9. Montrer qu'il existe une autre façon de jouer pour trouver les r objets en posant moins de questions en moyenne.

10. On a admis dans les questions précédentes l'optimalité du découpage pour poser des questions.
Montrer que parmi tous les découpages possibles, celui qui vous a été indiqué en début du problème est celui qui permet de poser en moyenne le moins de questions possibles.

PROBLEME D'ALGEBRE : METHODE DU SIMPLEXE

Le but du problème est de chercher une méthode rapide pour déterminer un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, solution du problème suivant :

$$\text{Max} \quad ax + by \qquad \text{avec } \ a > 0, \ \ b > 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0 \\ \text{b)} & x + 2y \leqslant 42 \\ \text{c)} & x + y \leqslant 22 \\ \text{d)} & 2x + y \leqslant 26 \\ \text{e)} & 3x + y \leqslant 32 \\ \text{f)} & 4x + y \leqslant 40 \end{array}$$

On note D l'ensemble des couples (x, y) vérifiant simultanément les conditions a),b), c), d), e), f).
De plus, on note $D1$ l'ensemble des couples (x, y) vérifiant simultanément les conditions a'),b'), c'), d'), e'), f') avec

$$\begin{array}{ll} \text{a')} & x > 0 \qquad y > 0 \\ \text{b')} & x + 2y < 42 \\ \text{c')} & x + y < 22 \\ \text{d')} & 2x + y < 26 \\ \text{e')} & 3x + y < 32 \\ \text{f')} & 4x + y < 40 \end{array}$$

Enfin on définit les points suivants :

M_0	le point $(0, 0)$
M_1	le point d'intersection de la droite d'équation $x + 2y = 42$ avec l'axe des ordonnées
M_2	le point d'intersection des droites d'équation $x + 2y = 42$ et $x + y = 22$
M_3	le point d'intersection des droites d'équation $x + y = 22$ et $2x + y = 26$
M_4	le point d'intersection des droites d'équation $2x + y = 26$ et $3x + y = 32$
M_5	le point d'intersection des droites d'équation $3x + y = 32$ et $4x + y = 40$
M_6	le point d'intersection des droites d'équation $4x + y = 40$ et l'axe des abscisses
M_7	le point $(0, 0)$

Chacun de ces points sera appelé un sommet, les coordonnées des points M_i seront notées x_i et y_i.

1. (a) Montrer que le couple $(0, 0)$ appartient à D.
   (b) Montrer que D contient une infinité de points.
2. Montrer qu'il existe un nombre M positif tel que : $(x, y) \in D \Rightarrow x \leqslant M$ et $y \leqslant M$
   On note S et F les ensembles suivants :
   $$S = \{(x, y) \in D \ / \ \forall (z, t) \in D, \ \ az + bt \leqslant ax + by\}$$
   $$F = D - D1$$
   S est un ensemble non vide, on ne le démontrera pas.
3. (a) Dessiner le domaine D.

(b) Montrer que, pour tout élément (x, y) de $D1$, il existe i tel que :

$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \qquad i \geqslant 1$$

(c) En déduire qu'il existe un élément (u, v), élément de F, tel que $ax + by \leqslant au + bv$.

4. Soit M un point de S élément de $]M_i, M_{i+1}[$.
Montrer que M_i et M_{i+1} sont des éléments de S.
Rappel : Si M un élément de $]M_i, M_{i+1}[$ alors il existe un nombre t compris entre 0 et 1 strictement tel que $M = tM_i + (1-t)M_{i+1}$

5. En déduire que $\{M_0, M_1, \ldots, M_7\} \cap S \neq \emptyset$.

6. Soit M_j, M_{j+1}, M_{j+2} trois sommets consécutifs et M_i un sommet différent des trois précédents.

   Montrer que l'intersection des segments d'extrémités M_j, M_{j+2} d'une part et M_i, M_{j+1} d'autre part est réduite à un élément de D.

7. Soit M_j, M_{j+1}, M_{j+2} trois sommets consécutifs de coordonnées respectives (x_j, y_j) (x_{j+1}, y_{j+1}) (x_{j+2}, y_{j+2}) tels que :

$$\begin{array}{lcl} ax_j + by_j & \leqslant & ax_{j+1} + by_{j+1} \\ ax_{j+2} + by_{j+2} & \leqslant & ax_{j+1} + by_{j+1} \end{array}$$

(a) Montrer que, pour tout sommet M_i de coordonnées (x_i, y_i) on a l'inégalité suivante :

$$ax_i + by_i \leqslant ax_{j+1} + by_{j+1}$$

(b) En déduire que M_{j+1} est un élément de S.

8. En partant du point M_0, déterminer une méthode permettant de trouver une solution au problème initial, parmi les sommets et ce sans décrire nécessairement tous les sommets.

9. Soit M_i un sommet élément de S.

- Montrer que pour un faible accroissement de a ou de b, M_i est encore un élément de S.