# EDHEC

**School of management**

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

# MATHEMATIQUES I

Option économique

**Année 1982**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

## PROBLEME 1

Soit $n$ un entier naturel et $f_n$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_n(x) & = & e^{-\frac{1}{x}}x^n \quad \text{pour } x>0 \\ f_n(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que $f_n$ est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que $f_n$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
3. Représenter graphiquement la fonction $f_n$ pour $n \neq 0$, et la fonction $f_0$.
4. Etudier, suivant les valeurs de $n$ la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
5. Trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$, quand ces intégrales convergent et en déduire la valeur de $I_n$ en fonction de $n$ quand $I_{n+1}$ converge.

## PROBLEME 2

Soit $A$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $E$ le sous-ensemble de $A$ des applications $f$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad , \quad f(n+1) = a\, f(n) + b\, f(n-1) \qquad \text{relation } (\mathbf{i})$$

où $a$ et $b$ désignent des réels.

   (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $A$.

   (b) Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques. Montrer qu'il existe une application unique $f$ de $A$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ et vérifiant la relation ($\mathbf{i}$).

2. Soit $\Phi$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall f \in E \quad , \quad \Phi(f) = (f(0), f(1))$$

   (a) Montrer que $\Phi$ est une application linéaire.

   (b) Montrer que $\Phi$ est bijective.

   (c) Quelle est la dimension de $E$ ?

   (d) Soit $f_1 = \Phi^{-1}[(1,0)]$ et $f_2 = \Phi^{-1}[(0,1)]$.
   Montrer que $\{f_1, f_2\}$ est une base de $E$.
   Calculer les coordonnées d'une fonction $f$ de $E$ dans cette base.

3. Soit $g$ l'élément de $A$, défini par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = x^n$ , où $n$ est un réel fixé non nul.

   (a) Montrer que $g$ est élément de $E$ si et seulement si $x$ est solution d'une équation du second degré que l'on déterminera.

   (b) Trouver une relation entre $a$ et $b$ pour que cette équation ait 2 solutions distinctes $x_1$ et $x_2$ , (que l'on ne calculera pas).

   (c) Cette condition étant vérifiée, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad g_1(n) = x_1^n \quad \text{et} \quad g_2(n) = x_2^n$$

   Montrer que $\{g_1, g_2\}$ est une base de $E$.
   Soit $f$ un élément de $E$. On pose $f = \lambda.g_1 + \mu.g_2$.
   Calculer $\lambda$ et $\mu$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $x_1$ et $x_2$.

# PROBLEME 3

Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites réelles définies par

$$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times} \quad \begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} - x_{n-1} \end{cases}$$

Soit $(z_n)$ la suite complexe définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = x_n + iy_n$.

1. Calculer $z_0$, $z_1$, $z_2$ et $z_3$.

2. (a) Montrer que $(z_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire l'expression de $z_n$ en fonction de $n$.

   (c) Donner $z_n$ sous forme trigonométrique.
   Exprimer alors $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

3. Soient $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

   Calculer $A_n$ , $B_n$ et $C_n$ en fonction de $n$.

## PROBLEME 4

Un ascenseur dessert le rez-de-chaussée (niveau 0) et les niveaux $1, 2$ et $3$ d'un immeuble.

Dans la suite du problème on appellera "étage" la distance parcourue par l'ascenseur entre 2 niveaux consécutifs.

On suppose d'autre part :

- que les habitants n'utilisent l'ascenseur que pour se rendre du rez-de-chaussée à leur niveau d'habitation et réciproquement;
- qu'il y a le même nombre d'habitants à chaque niveau et que tous l'utilisent avec la même fréquence;
- que les habitants du rez-de-chaussée ne l'utilisent jamais;
- que l'ascenseur ne peut transporter qu'une personne à la fois;
- que, bien sûr, les habitants utilisent l'ascenseur autant de fois pour monter que pour descendre;
- que lorsqu'on utilise l'ascenseur, celui-ci doit se rendre du niveau où il se trouve au niveau où il est appelé, puis transporter l'habitant à son niveau de destination.

### PARTIE A

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux descentes des habitants.

Soit $n$, $0 \leqslant n \leqslant 3$ le niveau où se trouve l'ascenseur lorsqu'il est appelé, et $p$ , $1 \leqslant p \leqslant 3$, le niveau d'habitation de l'utilisateur.

a) Donner dans le tableau **1** le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de $n$ et de $p$.

| $p$ \ $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

Tableau **1**

b) Quelles sont les probabilités respectives $d_0, d_1, d_2$ et $d_3$ pour que l'ascenseur se trouve aux niveaux $0, 1, 2, 3$ lorsqu'on l'appelle?

c) Soit $X_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau $k$.
Donner les lois de probabilités de $X_1$, $X_2$ et $X_3$, et en déduire les espérances mathématiques $E(X_1)$ , $E(X_2)$ , $E(X_3)$.

d) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur, par descente d'un habitant de l'immeuble ?

## PARTIE B

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux montées des habitants.

a) $n$ et $p$ ayant la même signification que dans la partie **A**, donner dans le tableau **2** le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de $n$ et de $p$.

| $p$ \ $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

Tableau **2**

b) Soit $Y_k$: $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau $k$.
Donner les lois de probabilité de $Y_1$, $Y_2$ et $Y_3$.

c) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur par montée d'un habitant de l'immeuble ?

## PARTIE C

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des utilisations de 1'ascenseur (montées et descentes des habitants).

a) Soit $Z_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par ascenseur pour une utilisation d'un habitant du niveau $k$.
Déduire des résultats des parties **A** et **B** les lois de probabilité des variables aléatoires $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$.

b) Calculer $E(Z_1)$, $E(Z_2)$, et $E(Z_3)$.

c) En admettant que le coût d'utilisation de l'ascenseur est proportionnel au nombre d'étages qu'il parcourt, quelle devrait être la répartition équitable des charges annuelles d'ascenseur, par niveau d'habitation, sachant qu'elles s'élèvent à 11 600 F ?