ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 2005

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c, telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK.$$

   Calculer J^2, K^2, K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K. Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

2. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale. Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{11} < d_{22} < d_{33}$ (où d_{ij} est le coefficient d'indices i et j de D).

3. En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$. En déduire les valeurs propres de la matrice M.
   Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4. On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4,2,\sqrt{2})$.
   On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   (a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ par : $f(x,y,z) = \dfrac{({}^tX)MX}{\|X\|^2}$.

      i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que $f(x,y,z) = \dfrac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

      ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

   (b) On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

      i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe).
      Montrer que B et M commutent.
      En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
      Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
      Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

      ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

Exercice 2.

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_0 \geqslant 0$ et, pour $n \geqslant 1$: $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}(1+x)$.

   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite L que l'on précisera.

4. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.

   Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geqslant N_0$, alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. Ecrire en langage Pascal une fonction récursive ayant pour nom Suite qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Problème.

X et Y étant deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives f_X et f_Y, on rappelle que la fonction h définie par $h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$ est une densité de la variable aléatoire $X+Y$.

Partie I : un calcul d'intégrale.

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge où $J_\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}dx = \frac{1}{2\alpha}J_\alpha.$$

   En déduire que, pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a : $J_{\alpha+1} = \dfrac{2\alpha-1}{2\alpha}J_\alpha$.

3. Calculer J_1. Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par : $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.

1. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \dfrac{1}{k_n}g_n$ soit une densité de probabilité.
   Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$ (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$).

2. Soient (Ω, A, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur (Ω, A, P), de densité f_n. (On dira que X suit une loi de Student à n degrés de liberté).

   (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

(b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que $V(X) = \dfrac{n}{n-2}$.

Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}.$$

Partie III : simulation d'une loi.

Dans la plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point M. On suppose que X, mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan X$. En déduire que $\tan X$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.
2. Exprimer Y, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point M, en fonction de X. Reconnaître la loi de Y.
3. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction random simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. On considère le programme informatique suivant :

```
program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=random;
x:= (pi*u-pi/2);
end.
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

On considère un espace probabilisé (Ω, A, P).

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur (Ω, A, P), de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

   (a) On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f continue sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f et montrer que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.
   On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.

   (b) Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g, et que Y et $-Y$ ont même loi.
   Montrer que, pour tout réel x, $P([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$.
   Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x. (On pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
   En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité f de Y en fonction de g.

2. Soit c un réel strictement positif. A l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale converge et la calculer.

3. Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur (Ω, A, P), indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^{\times}$, de même densité ω définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

(a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

(b) Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ est donnée par : $x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

(c) Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ puis reconnaître la loi de $\dfrac{X}{X'}$.