ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 2005

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE1

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad : \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

EXERCICE 2.

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$
- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, g(x\,;y) = xe^y - ye^x$.

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

2.1 Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

4. Étudier la nature de la branche infinie.

5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.

   (a) Donner la valeur de x_0.

   (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.

   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

   (b) On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$.

   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

   (e) Montrer successivement que pour tout entier n :

   $$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}\,|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).

2.2 Recherche d'extremum éventuel de g.

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

2. Montrer que si g admet un extremum local en $(a; b)$ de $\mathbb{R}^2$, alors : $ab = 1$ et $a = e^{a-1/a}$.
   En déduire que nécessairement $a > 0$, $ab = 1$ et $f(a) = 0$ et donc que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1; 1)$.

3. Calculer les réels : $r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1; 1)$; $s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1; 1)$; $t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1; 1)$.

4. La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :
" deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ".
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :
Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$ avec la convention $a_0 = 0$.

3.1. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
   Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

3.2. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :

   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, $A_n$est réalisé

   ou

   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Écrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n ; l'entier n, le réel p étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier naturel n ; $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}((r_2)^n - (r_1)^n)$.
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3.3. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n tout entier naturel n, par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire que A est diagonalisable.
4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

5. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
(Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de $r_1$et $r_2$seulement).

6. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

3.4. Étude du temps d'attente du premier double pile.

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n ; $P(T = n + 1) = a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(T = n + 1) = 1$.

2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T) = \dfrac{1+p}{p^2}$.