ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 2002

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Id_E l'identité de E, Θ l'endomorphisme nul.
$\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
Pour tout n, $\mathbb{C}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à l'entier n.
Si g est un endomorphisme de E, on définit g^n par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^n = g^{n-1} \circ g, \quad n \in \mathbb{N}^\times \end{cases}$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, on note $P(g)$ l'endomorphisme de E égal à :

$$P(g) = a_0 Id_E + a_1 g + \cdots + a_p g^p$$

On rappelle que pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

On désigne par T le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation $T(f) = \Theta$.

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de T. Soient α et $\overline{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées. Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. On désigne par φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de P par T.

   (a) Rappeler le théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes.
   (b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

3. On note $L_1,\ L_2,\ L_3$, les polynômes définis par

$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha) \quad L_2(X) = (X-1)(X-\overline{\alpha}) \quad L_3(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$$

   (a) Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) appartenant à C^3 tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

   et exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de α, $\overline{\alpha}$, n. Vérifier que $c_n = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$$

   (d) Justifier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) vers des réels respectifs a, b, c.

4. On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

   (a) Montrer que $h = \dfrac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E)$.
   (b) Prouver enfin que h est un projecteur.

Exercice 2

On se propose ici d'étudier la série de terme général

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où x est un réel quelconque et a_n, un réel défini par

$$a_n = \int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

I. Etude de l'absolue convergence de la série.

1. Prouver que pour tout n entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}$$

2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur x, pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

II. Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.

On suppose maintenant, $-1 \leqslant x < 1$.

1. Pour $t \in [0,1]$, montrer que : $\quad 2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$.

2. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$.

3. On pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$$

Montrer que pour tous les entiers naturels n :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{8\,|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

4. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

5. Donner la valeur de a_0, puis établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k$$

6. Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, le réel x et l'entier p étant supposés donnés.

PROBLEME

Deux biens C_1 et C_2 indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché. On appelle "panier de biens" tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'ensemble D suivant :

$$D = \{(x, y) \;/\; 0 \leqslant x,\; 0 \leqslant y \leqslant 5,\; 2x + 3y \leqslant 19\}$$

x, y désignent respectivement les quantités du bien C_1 et du bien C_2 qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.
Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.
On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.
Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble B des couples (x, y) de D tels que $x + y \leqslant 8$.
Les préférences de ce consommateur sur B, sont définies de la façon suivante : (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si $(y-3)e^{x+2} \geqslant (y'-3)e^{x'+2}$
L'application u définie sur B par : $u(x, y) = (y-3)e^{x+2}$, pour $(x, y) \in B$ s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

I. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

   (a) (x, y) est préféré ou indifférent à (x, y).

   (b) Si (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') et si (x', y') est préféré ou indifférent à (x'', y'') alors (x, y) est préféré ou indifférent à (x'', y'').

   (c) (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') ou (x', y') est préféré ou indifférent à (x, y).

II. Courbes d'indifférence.

1. Représenter graphiquement l'ensemble B dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de B.

2. Dans ce qui suit, pour m réel, on désigne par A_m l'ensemble défini par

$$A_m = \{(x, y) \in B \;/\; u(x, y) = m\}$$

   (a) Déterminer la fonction numérique f_m, telle que, pour m fixé on ait, pour tout élément (x, y) de A_m, $y = f_m(x)$.

   (b) Etudier et représenter dans le même repère que celui de la question .1 la fonction $x \mapsto y = f_m(x)$ pour $m = -8$, $m = 0$, $m = 8$.
   ($e^{-2} \simeq 0.14,\; e^{-3} \simeq 0.05,\; e^{-4} \simeq 0.02,\; e^{-5} \simeq 0.007,\; e^{-6} \simeq 0.002,\; e^{-7} \simeq 0.001$)

   (c) Déterminer m_0 pour que la courbe d'équation $y = f_{m_0}(x)$ soit tangente à la droite (T) d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

   Représenter la courbe d'équation $y = f_{m_0}(x)$ sur le graphique.
   ($e^3 \simeq 20.09,\; e^2 \simeq 7.39,\; e \simeq 2.72$).

III. Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. On admet que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est borné.

2. Justifier l'existence d'un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x, y) de B.

3. On note $\mathring{B}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples solutions du système

$$\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < 5 \\ 2x + 3y < 19 \\ x + y < 8 \end{cases}$$

Montrer que u n'admet pas d'extremum local sur $\mathring{B}$.

4. On étudie dans cette question le maximum de la fonction u sur B, sous la contrainte :

$$2x + 3y = 19$$

   (a) Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction g de la variable réelle, définie sur $[2, 5]$ par :
$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3}\, e^{x+2}$$

   (b) Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

5. Etudier de même la recherche du maximum de la fonction u sur B, sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Déduire de ce qui précède la valeur du couple (x_0, y_0).

IV. Etude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien C_1.
Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.
Pour tout i de $\mathbb{N}^\times$, le numéro X_i affecté au i-ième consommateur interrogé est une variable aléatoire.
Les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^\times}$ sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :

- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.
- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier N , avec N supérieur ou égal à 2.

Enfin, on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

Partie 1

On suppose que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suivent la même loi, une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$. Par convention : $C_n^j = 0$ pour $j > n$.
Etude d'un cas particulier.

1. Pour cette question seulement, $N = 3$.

   (a) Donner la loi des variables T_1 et T_2.

   (b) Calculer leur espérance et leur variance.

Etude de la loi de T_1.

1. Quel est l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_1 ?

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, la probabilité de l'événement $\{T_1 > n\}$ est donnée par : $P(\{T_1 > n\}) = \dfrac{C_N^n}{N^n}$.

   En déduire la loi de T_1.

3. Montrer que l'espérance de T_1 est donnée par $E(T_1) = (1 + \dfrac{1}{N})^N$.

4. De même, prouver que $E(T_1^2 - T_1) = 2(1 + \dfrac{1}{N})^{N-1}$.

   En déduire la variance $V(T_1)$ de T_1 en fonction de N.

5. Donner les limites de $E(T_1)$ et $V(T_1)$ lorsque N tend vers l'infini.

Etude de la loi de T_2.

1. Montrer que, pour tous entiers naturels r, n :

$$\sum_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$$

2. Quel est l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_2 ?

3. Par récurrence sur l'entier n inférieur ou égal à N, prouver que

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad P(\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leqslant j\}) = \frac{C_j^n}{N^n}$$

4. En déduire la loi de T_2.

5. Quelle est votre conclusion ?

Partie 2

On suppose que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ sont des variables aléatoires absolument continues qui suivent une loi uniforme sur le segment $[1, N]$.

1. Montrer que la densité de probabilité f_n d'une somme de n variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$, est donnée sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Prouver que si la variable X suit une loi uniforme sur le segment $[1, N]$, alors la variable Y, définie par $X = 1 + (N - 1)Y$, suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

3. En déduire la loi de T_2.