ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 2001

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1. Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

2. Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{-bt} \quad \text{pour} \quad t > 0 \text{ et } h(t) = \frac{ab}{a+b}\, e^{at} \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0$$

   On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3. Soit s un réel positif. Etablir l'égalité: $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.

4. (a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

   (b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 2

Soient n un entier $\geqslant 2$ et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

I est la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E. Si $A = (a_{i,j})$ appartient à E, on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$, la somme $a_{1,1}\check{} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ des éléments diagonaux de A.

On considère l'application g de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = \text{tr}\ ({}^tAB)$.

1. Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.

2. (a) Soit M une matrice de E. Montrer que $\text{tr}\ (M) = \text{tr}\ ({}^tM)$.

   (b) En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E, on a $g(A, B) = g(B, A)$.

3. Soit A un élément de E. Montrer que $g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A.

4. Montrer, à (aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{\ n}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\ n}$ défini par:
   $f(e_1) = e_n$ et, pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n,\ f(e_k) = e_{k-1}$

5. (a) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^{\ n}$.

   (b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} =^t U$.

   On suppose, pour les deux questions suivantes, que $n = 4$.

6. Calculer U^2 et U^3 et montrer que (I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g.

7. On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U^2, U^3) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F.

Problème

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Un joueur dispose initialement d'une fortune a. On note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du n-ième lancer. On convient que F_0 est la variable aléatoire certaine égale à a. On obtient la fortune F_{n+1} à partir de F_n de la manière suivante:

avant le lancer $n+1$, le joueur mise une partie X_n, entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. Si le lancer $n+1$ fait apparaître pile, la fortune F_{n+1} est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune F_{n+1} est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples (parties 1 et 2) dans lesquels les mises X_n, sont des *variables aléatoires.* A cet effet, on associe aux variables aléatoires F_n des polynômes G_n dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

$E(X)$ et $V(X)$ désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X.

Résultats préliminaires.

1. Pour tout entier positif ou nul n, montrer que F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, .., 2a_n\}$

   Pour tout entier positif ou nul n, on définit le polynôme G_n par: $G_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)x^k$.

2. (a) Calculer $G_n(1)$.

   (b) Que représente concrètement $G_n(0)$? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n(0)$ est croissante et convergente.

   (c) Montrer que $G_n'(1) = \dfrac{E(F_n)}{2}$. Etablir de même que $V(F_n) = 4G_n''(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2$.

3. Montrer que le polynôme G_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Partie 1

Sort n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de X_n sachant $(F_n = 2k)$ est une loi uniforme sur $[\![0, 2k]\!]$.

1. Etablir, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant 2k$, l'égalité:

$$P(F_{n+1} = 2j) \cap (F_n = 2k) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k)$$

   (On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer $n+1$.)

2. En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P(F_{n+1} = 2j)$.

3. Montrer que pour x appartenant à $[0, 1[$, $G_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{a_n} \dfrac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)(x-1)} P(F_n = 2k)$.

4. En déduire, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, l'égalité: $(1-x)G_{n+1}(x) = \int\limits_x^1 G_n(t^2)t \qquad (1)$

5. Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geqslant 0$, on a $E(F_n) = a$.

Partie 2 Les deux sous parties A et B sont indépendantes)

On suppose maintenant que la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $(F_n = 2k)$ est une loi binomiale de paramètres $2k$ et r, r étant un réel de $]0, 1[$.

A Simulation informatique de l'expérience

On considère le programme suivant

```
program simulation ;
var a,n,i,X,F: integer ;
 r,p:real; '
fonction mise(m:integer,s:real):integer ;
 ..................
end;
begin
 randomize; readln(n); readln(p); readln(r); readin(a) ; F:= a ;
 for i:=1 to n do begin
 X:=mise(F,r);
 if random < p then ......................
 ....................
 end ;
end.
```

La fonction "random" est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. L'instruction "randomize" est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binomiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binomiale de paramètres m et s.

1. Rédiger les lignes manquantes (déclarations et instructions) dans la définition de la fonction " mise ".

2. Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_n, \dots, F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

B Etude théorique

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + (1-p)(1-r)^2$ et $B = 2[pr + (1-p)(1-r)]$.

1. En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 0$,on a:

$$G_{n+1}(x) = pG_n[(xr + 1 - r)^2] + (1-p)G_n[(x - xr + r)^2]. \qquad (2)$$

Dans les questions 2 et 3, on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$

On considère le trinôme Q, défini par $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$, et la suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q(u_n)$.

2. (a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité: $Q(x) = x + A(x-1)^2$.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

3. (a) Montrer, en utilisant (2) et la convexité de G_n, que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x \geqslant 0$, on a l'inégalité: $G_{n+1}(x) \geqslant G_nQ(x)$.
   (b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'inégalité: $G_{n+1}(0) \geqslant G_1(u_n)$. Conclure.

   On revient au cas général p quelconque.

4. (a) Montrer à l'aide de (2), que la suite $E(F_n)_n$ est géométrique de raison B.
   (b) En posant $p' = \dfrac{1}{2} - p$ et $r' = \dfrac{1}{2} - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.

(c) Montrer que si la suite $(E(F_n))_n$ tend vers 0, alors la suite $P(F_n = 0)_n$ tend vers 1.

5. (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, établir à l'aide de (2) une relation entre $G''_{n+1}(1)$, $G''_n(1)$ et $G'_n(1)$.

   (b) Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{G''_n(1)}{B^n}$ est arithmético-géométrique.

   (c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression explicite de $G''_n(1)$ en fonction de a, n, A, B.

On suppose, dans cette dernière question, que $p = r = \dfrac{1}{3}$.

6. (a) Calculer les trois réel A, B, B^2 et en déduire un équivalent de $V(F_n)$ quand n tend vers l'infini.

   (b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité $P(F_n < 2^{n/4}a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités: $2^{\frac{1}{4}} > \dfrac{10}{9}$ et $3.\sqrt{2} > 4$.)