

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 2000

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probablisé. On note f une densité de X , F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes:

- i) Si t appartient à $] - \infty, 0[$, $f(t) = 0$.
- ii) Si t appartient à $[0, +\infty[$, $f(t)$ est positif ou nul.
- iii) f est continue sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.
Cet unique réel, que l'on notera m , sera appelé **médiane** de X .

2. Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Montrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X .

3. On suppose dans cette question que la densité de X est donnée sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t e^{-t}$ et sur $] - \infty, 0[$ par $f(t) = 0$.

- (a) Vérifier que f satisfait aux hypothèses du début de l'exercice.
- (b) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- (c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1 \leq m \leq 2$.
(On donne $6 < e^2 < 9$).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m . On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(2x + 2)$, fonction qui va permettre de construire une suite convergant vers m .

- (d) Montrer que $g(m) = m$.
- (e) Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et

$$|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$$

(f) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n > 0$ par $u_n = g(u_{n-1})$.

Montrer que $|u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(g) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4. On revient maintenant au cas général et on suppose que la variable X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. On note toujours m la médiane de X .

(a) Montrer qu'on a les inégalités :

$$V(X) \geq \int_0^m (t - E(X))^2 f(t) dt \quad \text{et} \quad V(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$$

(b) En distinguant les cas $m \leq E(X)$ et $m > E(X)$, montrer que:

$$|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$$

Exercice 2

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = P(X + 1) + P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. On note \mathcal{B} la base usuelle de E constituée, dans cet ordre des quatre polynômes $1, X, X^2, X^3$.

Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que f est bijectif.
4. Calculer la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} .
5. Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

- (a) Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 le polynôme $Q = f^{-1}(P)$.
- (b) On considère pour tout entier strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k)$$

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $(-1)^n, Q(n+1)$ et $Q(1)$.

- (c) Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3

Exercice 3

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note T' l' "intérieur" de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$

1. Représenter sur un même graphique T et T' .
2. On admet que T' est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
 - (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f .
 - (b) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T' .
3. Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x, y) de T :

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).

On suppose que $p \geq \frac{1}{4}$ $r \geq \frac{1}{4}$ $u \geq \frac{1}{4}$ et que $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{\text{ième}}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge). On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

4. Déterminer la loi de X . Faire de même pour Y .
5. Soit i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X, Y) .
6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
7. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:

$$P(D = k) = \frac{pr}{p+r} \left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1} \right]$$

8. Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p, r)$. Encadrer alors $E(D)$.

Fin de l'épreuve