

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1999

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations. Tournez la page S.V.P

**Tournez la page
S.V.P**

Exercice 1

On considère la suite d'intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$ où n est un entier positif.

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0 .

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n}$.
En déduire la limite de la suite de terme général J_n .

3. Montrer que la suite (J_n) est décroissante.
En déduire sans calcul complémentaire que

$$\frac{1}{2} (J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2} (J_{n-1} + J_n)$$

4. Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .

5. En déduire la limite de la suite de terme général nJ_n .

Exercice 2

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier l'inversibilité de la matrice P et calculer son inverse par la méthode du pivot.

2. Soit a un réel. Former la matrice $A - aI$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer, sans calcul, les valeurs de a telles que $A - aI$ ne soit pas inversible ?

3. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale. Que remarquez vous ?

4. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

5. Exprimer A^{-1} , puis $(A^{-1})^n$ pour tout entier $n \geq 1$, à l'aide de P, P^{-1} , et D^{-1} .
Ecrire la matrice A^{-1} sous forme de tableau.

Exercice 3

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols.

On considère qu'une place donnée peut être dans deux états réservée ou libre. La place est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante

- Si la place est réservée le jour k , elle le sera encore le jour $k + 1$ avec la probabilité 0,9 (pour tenir compte des annulations éventuelles).
- Si la place est libre le jour k , elle sera réservée le jour $k + 1$ avec la probabilité 0,4.

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k .

1. Montrer que la suite (r_k) est arithmético-géométrique.

2. En déduire l'expression explicite de r_k en fonction de k .
3. Calculer la limite r de cette suite quand k tend vers $+\infty$.
On suppose maintenant que le nombre de jours de la réservation est suffisamment grand et on admet que la probabilité que la place soit réservée le jour de la fermeture est égale à r .
L'avion a une capacité de 140 passagers, mais la compagnie pense que du fait des annulations, il est possible d'ouvrir à la réservation un nombre n plus important de places.
4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de places, parmi les n , qui seront réservées.
Quelle est la loi de X , son espérance et sa variance?
5. En approchant la loi de X par une loi normale, expliquer comment choisir la valeur maximale de n pour que $P(X \leq 140) > 0,95$.
On ne demande pas de calculer cette valeur.