ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1999

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice1

Soit f_n la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$(x,y) \longmapsto f_n(x,y) = (x^n - y)e^{x-y}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On se propose de déterminer les extremums éventuels de cette fonction dans les deux cas particuliers $n = 2$, puis $n = 1$.

1.
   (a) Justifier que f_n, est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles du premier ordre de f_n.

2. *On se place dans le cas $n = 2$.*
   (a) Montrer qu'il n'existe qu'un seul point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions nécessaires d'existence d'un extremum.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f_2 et montrer que le point (x_0, y_0) est bien un extremum dont on précisera la nature.

3. *On se place dans le cas $n = 1$.*
   (a) Montrer qu'il existe une infinité de points en lesquels le gradient de f_1 s'annule.
   (b) Montrer qu'en ces points la fonction f_1 admet un minimum.

Exercice 2

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) M est-elle diagonalisable ?

   On se propose de calculer M^n pour tout entier naturel n.

2. Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

   $H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

   $H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A' = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$

   Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs :

   $HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne U_n à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. *Calcul de* V^b

   On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

   Pour tout entier naturel n, calculer W^n et écrire explicitement la matrice V^n.

5. *Calcul de* U_n.

   (a) Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.
   Calculer MX puis $M^n X$.

   (b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5a les valeurs de a_n, b_n et c_n.

Problème

Le but de ce problème est l'étude de la répartition des revenus dans une population donnée, ainsi que de deux modèles d'imposition.
Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I : Répartition des revenus dans une population donnée

On fait choix d'une unité u de revenu (par exemple $u = 1000$ F) et on appelle X la variable aléatoire représentant dans cette unité le revenu annuel d'un individu pris au hasard dans une certaine population. On suppose que X suit la loi de Pareto de paramètres $\alpha, r_0, 0$ c'est-à-dire qu'une densité f de X est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{r_0}\left(\dfrac{r_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geqslant r_0 \\ 0 & \text{si } x < r_0 \end{cases} \qquad \text{avec } r_0 > 0,\ \alpha > 1$$

r_0 est le revenu minimal recensé dans la population.

1. Calculer la fonction de répartition F de X et donner l'allure de son graphe.

2. Calculer le revenu moyen m d'un individu de la population.

3. Soit N l'effectif total de la population et $N(r)$ le nombre des individus ayant un revenu au moins égal à r (r réel positif).

   (a) Quel est le montant total M des revenus de la population ?

   (b) En exprimant de deux façons différentes la probabilité qu'un individu, pris au hasard dans la population, ait un revenu au moins égal à r, montrer que

   $$N(r) = [1 - F(r)]N$$

   En déduire l'expression de $N(r)$ en fonction de N, α et r_0.

4. On change d'unité de revenu (on remplace u par une autre unité $u' = \lambda u$, où $\lambda > 0$) et on appelle X' la variable aléatoire représentant le revenu annuel d'un individu exprimé dans l'unité u'. Calculer X' en fonction de X et montrer que la loi de X' est aussi une loi de Pareto.

Partie II : Etude d'un modèle d'imposition par tranches

Dans la plupart des pays, l'Etat prélève une partie des revenus déclarés des habitants par un impôt direct.
On suppose dans cette partie II que ce prélèvement se fait par tranches. Une unité u de revenus étant choisie, les tranches sont déterminées par une suite strictement croissante de réels q_n (on suppose $q_0 = 0$). La partie des revenus d'un individu se trouvant dans la tranche $[q_i, q_{i+1}[$ est imposée au taux τ_i, la suite (τ_i) étant une suite croissante de réels de $[0, 1]$ (plus les tranches sont hautes, plus le taux d'imposition est élevé).
Ainsi un individu disposant d'un revenu annuel r paiera un impôt :

$$i(r) = \begin{cases} r\tau_0 & \text{si } 0 \leqslant r < q_1 \\ q_1\tau_0 + (q_2 - q_1)\tau_1 + \cdots + (q_n - q_{n-1})\tau_{n-1} + (r - q_n)\tau_n & \text{si } q_n \leqslant r < q_{n+1} \text{ avec } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $N(r)$ le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r. On suppose que la fonction $r \mapsto N(r)$ est continue sur R_+ et on admet que la tranche $[q_n, q_{n+1}[$ rapporte à l'Etat la somme : $I_n = \tau_n \int\limits_{q_n}^{q_{n+1}} N(r)dr$.

On suppose dans cette partie que :

- pour tout entier naturel n , $q_n = n$, et chaque tranche $[n, n+1[$ est imposée au taux $\tau_n = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-bn})$, où b est un paramètre réel strictement positif.
- le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r est

$$N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r \leqslant 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Cela revient à prendre pour unité de revenu le revenu minimal recensé dans la population, N étant le nombre total de contribuables.

1.
   (a) Quel est le taux d'imposition de la tranche $[0, 1[$?
   (b) Ecrire, en Turbo-Pascal, un programme qui saisit le revenu r d'un contribuable et la valeur choisie pour b, qui calcule et affiche la valeur de l'impôt $i(r)$ acquitté par ce contribuable.

2. Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{\tau_n}{n(n+1)}\right)_{n \geqslant 1}$ est convergente et que le montant total de l'impôt encaissé par l'Etat est $I = N \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\tau_n}{n(n+1)}$.

   On désigne désormais cet impôt total par $I(b)$ (et non plus simplement I) pour mettre en évidence qu'il dépend

3. (a) En admettant que : $-\ln(1 - x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ pour $0 < x < 1$, montrer que :

$$I(b) = \frac{N}{2}(1 - e^b)\ln(1 - e^{-b})$$

   (b) Montrer que I est une fonction de b continue et dérivable sur $]0, +\infty[$
   (c) Etudier $\lim\limits_{b \to 0} I(b)$ et $\lim\limits_{b \to +\infty} I(b)$.
   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction I.

4. On admet que le montant total des revenus de la population est dans ce modèle $M = 2N$.
   Avec le système d'imposition étudié dans cette partie **III**, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct le dixième de ce montant total ? Peut-il en prélever le tiers ?

Partie III : Etude d'un modèle d'imposition continu

On reprend les notations de la partie II, mais on suppose ici que le taux d'imposition est une fonction $r \mapsto \tau(r)$ continue et croissante. On admet que le montant total de l'impôt est dans ce cas : $J = \int_0^{+\infty} N(r)\tau(r)dr$ sous réserve de convergence de cette intégrale. On suppose désormais que :

- $\tau(r) = \frac{1}{2}(1 - e^{-br})$, où b est un paramètre réel strictement positif.
- le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r est :

$$N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r \leqslant 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & \text{si } r > 1 \end{cases} \qquad \text{(même hypothèse qu'au } \mathbf{II}\text{)}$$

1. Donner le tableau de variations de la fonction τ sur R_+.
2. On note maintenant $J(b)$ l'impôt total pour mettre en évidence qu'il dépend du paramètre b.
   (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$ est convergente.
   (b) Montrer que $J(b) = \frac{N}{2}\left[2 + \frac{e^{-b} - 1}{b} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr\right]$.
   (c) Montrer sans chercher à calculer sa dérivée que J est une fonction croissante de b.
3. On pose, pour tout réel b strictement positif, $\varphi(b) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$.
   (a) Montrer que, pour $b > 0$, on a: $\varphi(b) \leqslant e^{-b}$. En déduire $\lim_{b\to+\infty} \varphi(b)$.
   (b) Justifier, pour $A > 1$, l'inégalité $\int_1^{A} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$ et en déduire que:
   $$e^{-bA} - \frac{1}{A} \leqslant \varphi(b) \leqslant 1$$
   Pour tout $\varepsilon > 0$, on fixe $A > 1$ tel que l'on ait $\frac{1}{A} < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Montrer alors qu'on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour $0 < b < \eta$, on ait:
   $$1 - \varepsilon < e^{-bA} - \frac{1}{A}$$
   En déduire que : $\lim_{b\to 0} \varphi(b) = 1$.
   (c) On se propose ici d'étudier la continuité de la fonction φ sur $]0, +\infty[$.
   Pour b fixé strictement positif, écrire $\varphi(b + h) - \varphi(b)$ sous forme d'une intégrale.
   Montrer que pour $|h| < \frac{b}{2}$ et $r > 0$, on a : $\left|e^{-hr} - 1\right| \leqslant |h|\, r e^{\frac{br}{2}}$.
   En déduire qu'on peut trouver une constante K_b telle que pour $|h| < \frac{b}{2}$:
   $$|\varphi(b + h) - \varphi(b)| \leqslant K_b\, |h|$$
   Conclure
4. (a) Montrer que la fonction J est continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculer $\lim_{b \to 0} J(b)$ et $\lim_{b \to +\infty} J(b)$.

(c) Donner l'allure du graphe de J.

5. On admet que le montant total des revenus de la population est dans ce modèle $M = 2N$.

   Avec le système d'imposition étudié dans cette partie III, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct le tiers de ce montant total ?