ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 1999

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

(on donne: $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ à 10^{-2} près par excès et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près par défaut).

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \quad u_1 = b$ et pour tout entier naturel n:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.

1.b : Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

1.c : Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n par:

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

2.a : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n: $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \{M \in E / \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \alpha I\}$

et pour toute matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tau(M) = a + d$ et $\delta(M) = ad - bc$.

Question 1

On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ converge vers la matrice O si (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) sont des suites réelles de limite nulle.
Justifier les résultats suivants:

1 a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices, λ un réel et M une matrice:
si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la matrice O, alors $((A_n + B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda\ A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M\ A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n\ M)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers O.

1 b) Si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O.

1 c) Si une matrice A est diagonalisable, de valeurs propres λ et μ tels que $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, alors la suite $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O.

Question 2

Dans toute cette question, A désigne un élément de E tel que $\delta(A) < 0$.
On se propose de montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.

2 a) Montrer que A n'est pas élément de H.

2 b) Vérifier par le calcul que, pour tout élément M de E on a:

$$M^2 = \tau(M)M - \delta(M)I \qquad (*)$$

2 c) Montrer qu'il existe deux réels distincts λ et μ tels que:

$$\lambda + \mu = \tau(A) \qquad \text{et } \lambda\mu = \delta(A)$$

2 d) On pose $M = A - \lambda I$ et $N = A - \mu I$
Montrer que $MN = O$ et en déduire que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.
Montrer de même que N n'est pas inversible.

2 e) En déduire que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P de E inversible telle que
$A = P\ D\ P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Question 3

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\times]0,1[$ et f l'application définie sur U par :

$$(x,y) \to f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$$

3 a) Montrer que f est strictement négative sur U.

3 b) Montrer (en rédigeant soigneusement) que f admet un unique extremum sur U et que celui-ci est un minimum dont on donnera la valeur.
En déduire que, pour tout élément (x,y) de U: $\qquad -\frac{25}{65} \leqslant f(x,y) < 0.$

Question 4

Soient a et b deux réels tels que (a, b) soit un élément de l'ouvert U défini précédemment.
On pose $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ a(1-b) & a-1 \end{pmatrix}$
On se propose de montrer que la suite de matrices $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O.

4 a) Calculer $\tau(Q)$ et $\delta(Q)$
Vérifier que les résultats de la question 2 s'appliquent pour $A = Q$ et en déduire que Q admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que:

$$-\frac{1}{3} < \lambda + \mu < \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad -\frac{25}{64} \leqslant \lambda\mu \leqslant 0$$

4 b) Exprimer $\lambda^2 + \mu^2$ en fonction de $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ et en déduire que $\lambda^2 + \mu^2 < 1$.
Pourquoi peut on affirmer que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers O ?

Exercice 3

On modélise la durée de fonctionnement d'un appareil par une variable aléatoire réelle T définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une densité f.
On note F sa fonction de répartition et on suppose que F vérifie les propriétés:

- $F(t) = 0$ pour tout réel $t \leqslant 0$.
- F est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Sous une hypothèse introduite dans la question 2, on se propose d'expliciter F et f, puis de calculer l'espérance $E(T)$ de T, "*temps moyen de fonctionnement*".

Question 1

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
Soit α un réel strictement positif; si x est un élément de $\mathbb{R}^+$, on pose:

$$I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2} du \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^x t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt$$

1 a) A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$,
$J(x)$ en fonction de $I\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

1 b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du - xe^{-x^2}$$

1 c) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt$ converge et vaut $\frac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

Question 2

2 a) Montrer que, pour tout élément u de $\mathbb{R}^+$, $F(u) < 1$, puis en déduire que $P(T \geqslant u) \neq 0$.

2 b) Soient t_0 et t des réels tels que $0 \leqslant t_0 \leqslant t$.
On pose : $q(t_0, t) = \dfrac{1}{t - t_0} P(t_0 \leqslant T \leqslant t \;/\; T \geqslant t_0)$ (c'est une probabilité conditionnelle).
$q(t_0, t)$ est *le taux d'arrêt de fonctionnement entre les instants* t_0 *et* t.
On définit ensuite, sous réserve d'existence, le *taux d'arrêt de fonctionnement instantané en* t_0 par:

$$\tau(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} q(t_0, t)$$

Exprimer $q(t_0, t)$ en fonction de t, t_0, $F(t_0)$ et $F(t)$.
En déduire que $\tau(t_0)$ existe et que $\tau(t_0) = \dfrac{F'(t_0)}{1 - F(t_0)}$
Dans la suite de l'énoncé, on fait l'hypothèse suivante:
il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, $\tau(t) = ct$.

2 c) Montrer que, pour tout élément t de $\mathbb{R}^+$, on a :

$$-\ln\left[1 - F(t)\right] = c\frac{t^2}{2}$$

2 d) Soit t un élément de $\mathbb{R}^+$.
Expliciter $F(t)$, puis montrer, en posant $\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{c}}$, que $f(t) = \dfrac{2}{\alpha^2} t e^{-(t/\alpha)^2}$.

2 e) Montrer que $E(T)$ existe et donner sa valeur en fonction de c.