ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique et technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1996

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$f(x) = \ln x + x$$

1.1. Existence des racines de (E_n)

1. Etudier les variations de la fonction f. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, (E_n) admet une racine et une seule x_n et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Donner la valeur de x_1. Trouver à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près, et déterminer l'entier naturel p tel que
$$\frac{p}{100} \leqslant x_2 < \frac{p+1}{100}.$$

3. Représenter la fonction f relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique : 2 cm).

1.2. Etude de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \qquad \ln x < x.$$

2. Prouver que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad \frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$$

3. Quelle est la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$?

1.3. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. Montrer que $\dfrac{\ln(x_n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En déduire que :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

2. Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}.$$

   (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln n}.$$

   (b) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

   (c) Prouver alors que :
$$1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. En déduire qu'il existe une fonction ε ayant une limite nulle en 0 telle que, pour tout entier supérieur ou égal à 2, on ait :
$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})$$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature et la somme de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) \cos^n x dx.$$

A cet effet, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et *on admettra* dans la suite que, pour tout réel x :

$$\sum_{p=1}^{n} C_n^p \sin(2px) = 2^n \sin(nx) \cos^n x$$

2.1. Calcul de u_n en fonction de S_n

1. On définit la fonction f_n par :

$$\begin{cases} \forall t \in]0,1] \quad f_n(t) = \dfrac{1-(1-t)^n}{t} \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

   (a) Montrer que f_n est une fonction polynômiale sur $[0,1]$.

   (b) On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt.$$

   Prouver que :

$$I_n = \sum_{p=1}^{n} C_n^p \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

   puis, après avoir calculé $\int_0^1 (1-t)^{k-1}dt$ montrer que

$$I_n = S_n$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel p non nul :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$$

   et, à l'aide de la formule admise, en déduire que :

$$u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} S_n$$

2.2. Convergence et somme de la série

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = -\ln(1-x).$$

1. Etudier les variations de la fonction φ définie par :

$$\forall t \in [0,x], \quad \varphi(t) = \frac{x-t}{1-t}$$

   et montrer que :

$$\forall t \in [0,x], \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant x.$$

2. Vérifier que :
$$\forall t \in [0,x], \quad \frac{\varphi(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}.$$

3. Montrer, par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$$
où l'on a posé :
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(\varphi(t))^n}{1-t} dt.$$

4. En déduire de 2.2.1 que :
$$\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant -x^n \ln(1-x)$$

5. Exprimer la quantité $(1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} S_k x^k$ en fonction de $f(x)$, $R_n(x)$, S_n et x.

   Prouver que la série de terme général $S_k x^k$ est convergente. Montrer que sa somme est $\dfrac{f(x)}{1-x}$.

6. En déduire la valeur de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} u_p$.

PROBLEME

3.1. Première partie

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, par $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, et par f l'endomorphisme de E qui, à tout vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base B, associe le vecteur u' de coordonnées (x', y', z') dans la base B tel que :
$$\begin{cases} 4x' = y \\ 4y' = 4x + 2y + 4z \\ 4z' = y \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base B.

2. Calculer les valeurs propres de f
   f est-il diagonalisable ?
   M est-elle inversible ?

3. Déterminer les sous-espaces propres de f.

3.2. Deuxième partie

On dispose de deux urnes A et B : initialement l'urne A contient N boules noires tandis que l'urne B contient N boules blanches, avec $N \geqslant 2$. On y effectue une suite d'épreuves, chaque épreuve étant réalisée de la façon suivante :

On tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A est mise dans B, celle tirée de B est mise dans A.

On appelle Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne A à l'issue de la $k^{ième}$ épreuve et l'on pose $Z_k = Y_{k-1} - Y_k$, pour k entier naturel non nul, avec la convention $Y_0 = N$.

Pour k et j entiers naturels, on pose :
$$P(k,j) = P(Y_k = j)$$

où P désigne la probabilité. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(Y_k &= j) = 0 \text{ si } j > N \\
P(Y_0 &= N) = 1 \\
P(Y_0 &= k) = 0 \text{ si } k \neq N \\
P(Y_k &= -1) = 0
\end{aligned}$$

3.2.1 Etude du cas particulier $N = 2$

On note $U_k = \begin{pmatrix} p(k,0) \\ p(k,1) \\ p(k,2) \end{pmatrix}$, $\quad V = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer U_1.
   Calculer les probabilitsé conditionnelles :
   $$P_{(Y_k=j)}(Y_{k+1} = i)$$
   pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$ puis montrer que, pour tout entier naturel k :
   $$U_{k+1} = M.U_k$$

2. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul :
   $$U_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} W + V$$

3. En déduire l'expression de $p(k,0)$, $p(k,1)$ et $p(k,2)$ en fonction de k pour k entier naturel non nul.

4. Montrer que l'espérance $E(Y_k)$ de la variable Y_k est constante.

5. Calculer la variance $V(Y_k)$ de la variable Y_k en fonction de k et sa limite quand k tend vers $+\infty$.

3.2.2. Retour au cas général

Dans cette deuxième partie, on revient au cas général avec $N \geqslant 3$ et on se propose d'étudier la convergence des suites $(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ et $(V(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$.

1. Calcul de l'espérance $E(Y_k)$ de la variable Y_k.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable Z_k ? Calculer :
   $$P(Z_k = 1/Y_{k-1} = j) \text{ et } P(Z_k = -1/Y_{k-1} = j)$$
   pour $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant N$ et $k \in \mathbb{N}^\times$.

   (b) En appliquant la formule des probabilités totales, prouver que, pour tout entier naturel k non nul :
   $$E(Z_k) = \frac{2}{N}E(Y_{k-1}) - 1.$$

   (c) Montrer que la suite $(E(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.

   (d) En déduire l'expression de $E(Z_k)$ et $E(Y_k)$ en fonction de k et de N.

   (e) Montrer que les suites $(E(Z_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ et $(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^\times}$ sont convergentes et donner leur limite quand k tend vers $+\infty$.

2. Calcul de la variance $V(Y_k)$ de la variable Y_k :

(a) Montrer que :

$$E(Z_k^2) = E(Y_{k-1}^2) - 2E(Y_kY_{k-1}) + E(Y_k^2)$$

puis que

$$E(Z_kY_{k-1}) = E(Y_{k-1}^2) - E(Y_kY_{k-1}).$$

(b) En utilisant la méthode du 3.2.2.1.(b) montrer que :

$$E(Z_kY_{k-1}) = \frac{2}{N}E(Y_{k-1}^2) - E(Y_{k-1})$$

puis que :

$$E(Z_k^2) = \frac{2}{N^2}E(Y_{k-1}^2) - \frac{2}{N}E(Y_{k-1}) + 1$$

(c) Déduire des résultats précédents que :

$$E(Y_k^2) = 2\frac{N-1}{N}E(Y_{k-1}) + \frac{N^2-4N+2}{N^2}E(Y_{k-1}^2) + 1$$

puis que :

$$V(Y_k) = \frac{N^2-4N+2}{N^2}V(Y_{k-1}) - \frac{2}{N^2}\left[E(Y_{k-1}) - \frac{N}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}.$$

(On utilisera la relation $E(Y_k) = \dfrac{N-2}{N}E(Y_{k-1}) + 1$).

(d) En remarquant que :

$$E(Y_k) - \frac{N}{2} = \frac{N-2}{N}\left[E(Y_{k-1}) - \frac{N}{2}\right]$$

en déduire que $V(Y_{k+1})$ est égal à :

$$\frac{2(N-1)(N-3)}{N^2}V(Y_k) - \frac{(N-2)^2(N^2-4N+2)}{N^4}V(Y_{k-1}) + \frac{2(N-1)}{N^2}$$

(e) On pose :

$$u_k = V(Y_k) - \frac{N^2}{4(2N-1)}$$

Montrer que :

$$u_{k+1} = \frac{2(N-1)(N-3)}{N^2}u_k - \frac{(N-2)^2(N^2-4N+2)}{N^4}u_{k-1}$$

(f) En déduire qu'il existe deux réels λ et μ, que l'on ne calculera pas, tels que :

$$V(Y_k) = \frac{N^2}{4(2N-1)} + \lambda\left(\frac{N-2}{N}\right)^{2k} + \mu\left(\frac{N^2-4N+2}{N^2}\right)^k$$

(g) Montrer enfin que $V(Y_k)$ tend vers $\dfrac{N^2}{4(2N-1)}$ lorsque k tend vers $+\infty$