

**ECRI COME**

**Banque d'épreuves communes**

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

**MATHÉMATIQUES**

Année 1995

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page  
S.V.P**

## Exercice 1

Dans cet exercice:

$E$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

$\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices inversibles.

On considère l'application  $f$  qui, à tout élément  $P$  de  $E$ , associe le polynôme  $Q$  défini par:

$$Q(X) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$$

**1** - Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

**2** - Soit  $B$  un vecteur propre pour  $f$  c'est-à-dire un élément non nul de  $E$  tel qu'il existe un réel  $\lambda$  satisfaisant à la relation  $f(B) = \lambda B$ .

a. Montrer que  $B$  est nécessairement de degré 2.

b. On suppose que  $\lambda = 3$ . Montrer que  $-1$  est racine de  $B$ .

Soit  $k$  l'ordre de multiplicité de la racine  $-1$ ; il existe donc un polynôme  $A$  tel que:

$$B(X) = (X + 1)^k A(X) \quad \text{avec : } A(-1) \neq 0$$

Montrer que  $k = 2$  et que  $A$  est constant.

En déduire que  $\lambda = 3$  est une valeur propre de  $f$  et déterminer les vecteurs propres associés.

c. En supposant  $\lambda = -1$ , étudier de même la multiplicité de la racine 1.

En déduire que  $\lambda = -1$  est valeur propre de  $f$  et déterminer les vecteurs propres associés.

d. On suppose maintenant que  $\lambda \neq 3$  et  $\lambda \neq -1$ .

Montrer que  $-1$  et  $1$  sont des racines de  $B$ .

En déduire une factorisation des polynômes  $B$  obtenus, ainsi que la valeur propre associée à  $B$ .

**3** - Etude d'un cas particulier. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et  $g$  la restriction de  $f$  à  $F$ . On désigne par  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $F$ .

a. Montrer que  $g$  est un endomorphisme de  $F$ .

b. Ecrire la matrice  $A$  de  $g$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

c. Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $D$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  et une matrice  $P$  de  $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P D^n P^{-1}$$

d. Expliciter  $A^n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 2

On désigne par  $x$  un réel tel que  $x > 1$  et l'on se propose d'étudier la série de terme général  $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$  pour  $n \geq 1$ .

Lorsque la série converge, sa somme est notée:  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

**1** - Etude de la dérivabilité de  $f$ .

a. Justifier la convergence de la série définissant  $f$ .

b. Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $n \frac{x+1}{2} \ln^2(n) u_n(x)$ .

En déduire la convergence de la série de terme général  $\ln^2(n) u_n(x)$  et à fortiori la convergence de la série  $\ln(n) u_n(x)$ .

- c. Pour  $x > 1$  et pour tout réel  $h$  tel que  $absh \leq \frac{x-1}{2}$  montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange que

$$|u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln(n)u_n(x)| \leq \frac{h^2}{2} u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \ln^2(n)$$

puis que

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n)u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

- d. En déduire que  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ , donner une expression de la dérivée de  $f$  sous la forme de la somme d'une série.

## 2 - Représentation de $f$

- a. Pour  $x > 1$  et pour  $k$  entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant:

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que pour tout entier  $N > 1$ :

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

- b. Prouver alors que  $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$
- c. Préciser les limites de  $f$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures, et quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- d. Déduire des questions précédentes les variations de  $f$  et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4cm. On admettra que  $f(2) = \frac{\pi^2}{6}$  et  $f(4) = \frac{\pi^4}{90}$ .

## Problème

On dispose de deux urnes  $A$  et  $B$  contenant respectivement  $a$  et  $b$  boules ( $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls).

On procède alors à l'expérience suivante: on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne en admettant que la probabilité de choisir l'urne  $A$  est  $q$  et que la probabilité de choisir  $B$  est  $p$  avec  $p+q=1$  et  $p \in ]0, 1[$ .

On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose  $x = \frac{q}{p}$ .

### 1 - Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite  $U$  définie par la relation de récurrence suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times :: U_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$$

$U_0$  et  $U_{a+b}$  étant des réels donnés.

- a. Prouver que l'on a pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^\times$ :  $p(U_{n+1} - U_n) = q(U_n - U_{n-1})$ .
- b. Lorsque  $p = q$ , montrer que la suite  $U$  est une suite arithmétique.  
En déduire  $U_n$  en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $U_0$  et  $U_{a+b}$ .
- c. Lorsque  $p$  est différent de  $q$ , montrer qu'il existe deux constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, : U_n = \lambda + \mu x^n$$

Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $U_0$  et  $U_{a+b}$ .

## 2 - Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq a + b$ .

On note  $E_k$  l'événement: à partir d'un contenu de  $k$  boules dans l'urne  $A$ , l'expérience s'arrête parce que l'urne  $A$  est vide.

Ainsi  $P(E_0) = 1$  et  $P(E_{a+b}) = 0$ .

Et enfin, on note  $A$  l'événement: le premier tirage se fait dans  $A$ .

- a. Pour  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq a + b - 1$ , établir une relation entre  $P(E_k)$ ,  $P(E_{k+1})$  et  $P(E_{k-1})$ .
- b.
  - i. En utilisant les résultats de la partie 1, calculer la probabilité  $P(E_a)$  de voir l'expérience se terminer par le vidage de  $A$ .
  - ii. Calculer la limite de  $P(E_a)$  lorsque  $b$  tend vers  $+\infty$ .
  - iii. Pour  $p$  différent de  $q$ , déterminer la limite de  $P(E_a)$  lorsque  $p$  tend vers  $0,5$ .
- c. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne  $B$ ?
- d. Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer?

## 3 - Etude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer.

Pour  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq a + b$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes  $A$  ou  $B$  à partir d'un contenu initial de  $k$  boules dans l'urne  $A$ . Si l'expérience est sans fin, on pose  $X_k = -1$ , et alors d'après la question 2d, on sait que  $P(X_k = -1) = 0$ . On admet que  $X_k$  admet une espérance que l'on note  $E(X_k)$ .

Ainsi  $E(X_0) = 0$  et  $E(X_{a+b}) = 0$ .

- a. Pour  $j$  un entier naturel non nul et  $1 \leq k \leq a + b - 1$ , montrer que:

$$P(X_k = j) = qP(X_{k-1} = j - 1) + pP(X_{k+1} = j - 1)$$

En déduire que  $E(X_k) = 1 + qE(X_{k-1}) + pE(X_{k+1})$ .

- b. Pour  $p = q$ :
  - i. Montrer l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que la variable  $Y_k = X_k + \alpha k^2$  ait une espérance qui vérifie:

$$\forall k \geq 1 :: E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1})$$

- ii. En utilisant la partie 1 montrer que  $E(X_a) = ab$ .

- c. Pour  $p$  différent de  $q$ .

- i. Montrer l'existence d'un réel  $\beta$  tel que la variable  $Z_k = X_k + \beta k$  ait une espérance qui vérifie:

$$\forall k \geq 1 :: E(Z_k) = pE(Z_{k+1}) + qE(Z_{k-1})$$

- ii. En utilisant la partie 1 montrer que  $E(X_a) = \frac{1}{p - q} \left( \frac{(a + b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a \right)$ .

- iii. Quelle est la limite de  $E(X_a)$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$  dans le cas  $p < q$ ?