

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1994

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

Exercice 1

- 1 - a. Soit $u : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Déterminer, pour tout entier p , les fonctions $u^{(p)}$ et $v^{(p)}$.

- b. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Montrer qu'il existe deux réels λ et μ à préciser tels que

$$\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \lambda u(x) + \mu v(x).$$

En déduire $f^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_f$.

- c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $f^{(2k)}(0)$ et $f^{(2k+1)}(0)$.

Montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{3}]$, $|f^{(2n+3)}(x)| \leq (2n+2)! \frac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$.

- d. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que

$$\forall x \in [0, \frac{1}{3}], \quad |f(x)| + 2S_n(x) \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}.$$

- e. Soit a un réel de l'intervalle $[1, 2]$. On pose $x = \frac{a-1}{a+1}$.

Montrer en utilisant la question ?? que $|\ln(a) - 2S_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$.

- f. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)} < 5 \times 10^{-4}$.

- g. On choisit $a = \frac{3}{2}$; calculer x .

Pour $k \in \{0, \dots, 3\}$ donner la valeur exacte de $\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Calculer $2S_3(x)$. (on écrira, avec toutes ses décimales, la valeur approchée de $2S_3(x)$ affichée par la calculatrice.)

Comparer avec $\ln(\frac{3}{2})$ (on donnera l'ordre de grandeur de $\ln(\frac{3}{2}) - 2S_3(x)$).

Exercice 2

Problème

Partie I

Partie II