

**ECRI COME**

**Banque d'épreuves communes**

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

**MATHÉMATIQUES**

Année 1993

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page  
S.V.P**

## EXERCICE1

$n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continue et décroissante, et telle que  $\int_0^1 f(x)dx$  soit convergente.

On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- (a) i. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer que  $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx$ .

- ii. Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , montrer que  $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

- iii. En déduire que :  $\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$ .

- (b) En déduire la limite de  $S_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

2. (a) Justifier l'existence et calculer la valeur de  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}} du$ .

- (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que  $I = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

3. Soit  $P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$ .

- (a) Ecrire un algorithme qui, pour  $n$  donné, calcule et affiche  $P_n$ .

- (b) Donner les valeurs de  $P_n$  pour  $n \in \{20, 50, 100\}$ .

- (c) A l'aide du 1, déterminer la limite de  $P_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  
La convergence est-elle rapide ?

## EXERCICE 2

**N.B.** On pourra utiliser le fait qu'une matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  est inversible si et seulement si  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ , on note  $\phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

1. (a) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $\phi(A)$  si et seulement si

$$(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0.$$

- (b) En déduire l'équivalence suivante :

$$\underline{\lambda \text{ est valeur propre de } \phi(A) \Leftrightarrow \lambda^2 \text{ est valeur propre de } A.}$$

- (c) Exemple : si  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ , quelles sont les valeurs propres de  $\phi(A)$  ?  
 $\phi(A)$  est-elle diagonalisable ?

2. On suppose maintenant que  $a = 1$  et  $b = 0$ .

(a) Pour  $\lambda$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , on note  $V(\lambda)$  l'ensemble des vecteurs  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$  tels que

$$\phi(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

i. Déterminer  $V(1)$  et  $V(-1)$ , ainsi que leurs dimensions, dans le cas où  $d \neq 1$  ou  $c \neq 0$ .

ii. Même question si  $d = 1$  et  $c = 0$ .

(b) Etablir l'équivalence suivante :  $\phi(A)$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \text{ et } c = 0) \\ \text{ou} \\ (d > 0 \text{ et } d \neq 1) \end{cases}$

(c) Déterminer la probabilité pour que  $\phi(A)$  ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

i.  $c$  et  $d$  sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans  $[-5, 3]$ .

ii.  $c$  et  $d$  sont des réels choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans  $[-5, 3]$ .

(d) Déterminer la probabilité pour que  $\phi(A)$  soit diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$  dans chacun des cas 2(c)i et 2(c)ii.

## PROBLEME

Un jeu réunit une infinité de joueurs  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

- D'abord  $A_1, A_2, A_3$  disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables.  
Le joueur classé dernier est éliminé.
- Les deux autres et  $A_4$  disputent un deuxième tournoi analogue (indépendamment du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.
- Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec  $A_5$  un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers) etc...
- A chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.
- Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à deux tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).
- Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on note  $G_n$  l'évènement :

" $A_1$  est gagnant du jeu au  $n^{\text{ième}}$  tournoi".

- Enfin, soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).  
L'objet du problème est d'étudier la variable aléatoire  $X$  et calculer la probabilité pour que le joueur  $A_1$  gagne.

**Le problème est composé de deux parties largement indépendantes**

## Première partie : loi de $X$ et probabilité de $G_n$ pour $n \in \{2, 3, 4, 7\}$

A)

1. Calculer  $P(G_2)$ , c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur  $A_1$  remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut  $P(X = 2)$  ?
2. Pour tout entier  $k \geq 4$ , on note  $J_k$  l'évènement : " $A_k$  joue".
  - (a) Montrer que  $P(J_5) = \frac{2}{3}$ . Pour  $i \geq 4$ , que vaut  $P(J_{i+1}/J_i)$  ?
  - (b) En déduire que  $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$ .
3.
  - (a) Pour tout entier  $n \geq 2$ , comparer les évènements  $(X \geq n)$  et  $J_{n+2}$ .
  - (b) En déduire la valeur de  $P(X = n)$ .
  - (c) Vérifier que l'on a bien :  $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$ .
4. Quelle est la loi suivie par  $X - 1$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

B) Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels non nuls, on considère les évènements  $P_i$  et  $S_j$  suivants

$P_i$  : " $A_1$  est classé premier au  $i^{\text{ième}}$  tournoi"

$S_j$  : " $A_1$  est classé second au  $j^{\text{ième}}$  tournoi et le jeu continue"

1. Exprimer  $G_3$  et  $G_4$  à l'aide de ces évènements.
2.
  - (a) Calculer  $P(G_3)$ .
  - (b) Montrer que  $P(S_2/S_1) = \frac{1}{6}$  et que  $P(S_2/P_1) = \frac{1}{3}$ .  
Prouver que  $P(G_4) = \frac{1}{54}$ .
3.
  - (a) Ecrire les suites des classements de  $A_1$  (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'évènement  $G_7$ . (on vérifiera qu'il y en a huit).
  - (b) Calculer  $P(G_7)$

## Deuxième partie : probabilité pour que le joueur $A_1$ gagne

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , soit  $\mathcal{U}_n^k$  l'ensemble des  $n$ -listes de  $\{1, 2\}$  qui vérifient les trois conditions suivantes :

- a) elles finissent par 2; ù
- b) elles ne contiennent jamais deux "1" consécutifs;
- c)  $k$  fois (exactement) un "2" est suivi d'un autre "2"

Exemples : la suite  $(1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2)$  appartient à  $\mathcal{U}_{11}^3$ ;

$(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^3$ ;  $(2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^1$ ;  $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$ ;  $(1, 2, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$

On pose  $u_n^k = \text{card} \mathcal{U}_n^k$ , avec la convention :  $u_0^0 = 1$ .

1. **Calcul de  $u_n^k$** 
  - (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^\times$ , déterminer  $\mathcal{U}_n^0$ ,  $\mathcal{U}_n^n$ ,  $\mathcal{U}_{n+1}^n$ ,  $\mathcal{U}_{n+2}^n$ .  
En déduire que  $u_n^0 = 1$ ,  $u_n^n = 0$ ,  $u_{n+1}^n = 1$ ,  $u_{n+2}^n = 1$ .
  - (b) En classant les  $n$ -listes de  $\mathcal{U}_n^k$  suivant la valeur de leur  $(n-1)^{\text{ième}}$  élément, montrer que, pour  $n \geq 3$  et  $k \geq 1$  :  $\underline{u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}}$ .

- (c) Pour  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \in \llbracket 0, i \rrbracket$ , on pose  $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^i$  et  $\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j$ .
- Calculer  $\gamma_i^0$  et  $\gamma_i^i$ ; pour  $i \geq 2$  et  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ , exprimer  $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$  en fonction de  $\gamma_i^j$ .  
En déduire la valeur de  $\gamma_i^j$ .
  - Procéder de la même façon qu'au 1(c)i pour obtenir  $\delta_i^j$ .
  - En déduire que :  $\forall (k, p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = C_{k+p}^p$ .

## 2. Deux séries

Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $f : \begin{array}{ccc} [0, x] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{(1-u)^{k+1}} \end{array}$

- Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , calculer  $f^{(p)}(u)$ .
- A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\times, \quad \left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} C_{k+p}^k x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} C_{k+n}^k \left( \frac{x}{1-x} \right)^n.$$

- En déduire que :  $\sum_{p=0}^{+\infty} C_{k+p}^k x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ .
- Calculer  $\alpha_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+1}^k \left( \frac{1}{3} \right)^{k+2p+3}$  et  $\alpha'_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+2}^k \left( \frac{1}{3} \right)^{k+2p+4}$ .

## 3. Probabilité pour que $A_1$ gagne : on note $p_1$ cette probabilité

- Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^k \left( \frac{1}{6} \right)^k \left( \frac{1}{3} \right)^{n-k}$  (il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de  $P(G_7)$  effectué à la fin de la première partie).
- A l'aide d'une "permutation de  $\sum$ " (dont on admettra la validité), montrer que :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \beta_k \text{ avec } \beta_k = \sum_{n=k+2}^{+\infty} u_{n-2}^k \left( \frac{1}{3} \right)^n.$$

- Calculer  $\beta_0$ .
- Pour  $k \geq 1$ , montrer que  $\beta_k = \frac{4}{27} \left( \frac{3}{8} \right)^{k+1}$ .
- En déduire enfin la valeur de  $p_1$ .