ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1992

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice1

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)dt$

1. (a) Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (b) Calculer alors u_0.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2n+3}$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2n+3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2(2n+1)}$ Puis donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$

   (b) En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de $\left(S_n - \dfrac{\pi}{4}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Un distributeur de jouets distingue trois catégories de jouets :

T : les jouets traditionnels tels que poupées, peluches ;
M : les jouets liés à la mode inspirés directement d'un livre, un film, une émission ;
S: les jouets scientifiques vulgarisant une technique récente.

Il estime que

i) Le client qui a acheté un jouet traditionnel une année pour Noël choisira, l'année suivante, un jouet de l'une des trois catégories avec une équiprobabilité ;

ii) Le client qui a acheté un jouet inspiré par la mode optera l'année suivante
pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$,
pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{4}$,
pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

iii) pour un jouet T avec la probabilité $\frac{1}{4}$,
pour un jouet M avec la probabilité $\frac{1}{2}$,
pour un jouet S avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Le volume des ventes de ce commerçant vient de se composer

d'une part $p_0 = \dfrac{45}{100}$ de jouets de la catégorie T
d'une part $q_0 = \dfrac{25}{100}$ de jouets de la catégorie M
et d'une part $r_0 = \dfrac{30}{100}$ de jouets de la catégorie S.

On désigne par p_n, q_n, r_n, les parts respectives des jouets T, M, S dans les ventes du distributeur le $n^{ème}$ Noël suivant.

1. Montrer que le triplet $(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})$ s'exprime en fonction du triplet (p_n, q_n, r_n) au moyen d'une matrice A qu'on formera.
2. Soit P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer à l'aide de la méthode de Gauss que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
   (c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\times}$ que : $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
3. Exprimer (p_n, q_n, r_n) directement en fonction de n.
4. Quelles parts à long terme les trois catégories de jouets représenteront-elles dans la vente si l'attitude des consommateurs reste constante?

Problème

Dans tout le problème, si a et b sont des entiers naturels, on note $[\![a, b]\!] = \{i \in \mathbb{N} \quad / \quad a \leqslant i \leqslant b\}$.

Première partie

La société ACTUEL SA est une société de vente à domicile dont la politique de vente est la suivante : un collaborateur de cette société contacte par téléphone 100 clients potentiels auxquels il propose deux produits que l'on nommera A et B.
Pour un entier i compris entre 1 et 100, on notera :

R$_i$ l'événement : " la ième personne contactée reçoit le collaborateur ".
A$_i$ l'événement : " la ième personne contactée achète le produit A ".
B$_i$ l'événement : " la ième personne contactée achète le produit B ".

On fait les hypothèses suivantes :

(i) les événements $R_1, R_2, ..., R_{100}$ sont mutuellement indépendants et $\forall i \in [\![1, 100]\!], \quad P(R_i) = 0,2$.
(ii) les événements $A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_{100}, B_{100}$ sont mutuellement indépendants.
(iii) $\forall i \in [\![1, 100]\!], \quad P(A_i/R_i) = 0,5$ et $P(B_i/R_i) = 0,1$.

Enfin, si $i \in [\![1, 100]\!]$, on notera X_i et Y_i les variables aléatoires définies par :

$(X_i = 1)$ si et seulement si (A_i est réalisé)
$(X_i = 0)$ si et seulement si (A_i n'est pas réalisé),
$(Y_i = 2)$ si et seulement si (A_i et B_i sont réalisés),
$(Y_i = 1)$ si et seulement si (un des deux événements (et un seulement) A_i ou B_i est réalisé),
$(Y_i = 0)$ si et seulement si (A_i et B_i ne sont pas réalisés).

Par hypothèse $X_1, X_2, ..., X_{100}$ sont mutuellement indépendantes ainsi que $Y_1, Y_2, ..., Y_{100}$.

1. Soit $i \in [\![1, 100]\!]$, calculer $P(A_i)$. Quelle est la loi de X_i ?
   On note S la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_{100}$.

2. Quelle est la loi de S ? Rappeler les valeurs de $E(S)$ et de $V(S)$.
   Compte tenu des hypothèses, on estime que l'on peut approcher S par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$.
   N.B. Une table relative à la loi de poisson est fournie en annexe du sujet.
   Dans les questions 3 et 4, on utilisera une précision de 10^{-4}.

3. Calculer alors $P(S \geqslant 7)$.

4. On suppose que la vente d'un produit A rapporte au collaborateur un gain de 1000 F.

   (a) Quelle est la probabilité qu'à la fin du mois le collaborateur gagne au moins 7000 F ?

   (b) On suppose de plus, que s'il vend au moins 8 produits A dans le mois, le collaborateur perçoit une prime de 500 F.
   Sachant qu'il a gagné au moins 7000 F dans le mois, quelle est la probabilité que le collaborateur ait touché la prime ?

5. Soit $i \in [\![1, 100]\!]$

   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, calculer $P(Y_i = k)$.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_i.

6. On note $Z = Y_1 + Y_2$

   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?

   (b) Déterminer la loi de Z, puis son espérance et sa variance.

Deuxième partie

Dans cette partie n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Si $p \in]0, 1[$, on note $F_{n,p}$ la fonction de répartition d'une loi binomiale de paramètres n et p.
On notera $q = 1 - p$.
Si $\lambda \in]0, +\infty[$, on note π_λ la fonction de répartition d'une loi de Poisson de paramètre λ.
Ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad F_{n,p}(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i}$ et $\forall k \geqslant n, \quad F_{n,p}(k) = 1$
et $\forall k \in N, \quad \pi_\lambda(k) = \left[\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\lambda^i}{i!}\right] e^{-\lambda}$

1. **Expression intégrale de $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}(k)$:** dans cette question $k \in \mathbb{N}$.
   On note $I_k = \dfrac{1}{k!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^k dx$

   (a) Montrer l'existence de I_0 et donner sa valeur.

   (b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'existence de I_k et la relation :
   $$I_{k+1} = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} + I_k$$

   (c) En déduire que : $\forall k \in N, \quad \pi_\lambda(k) = I_k$.

2. **Expression intégrale de $F_{n,p}(k)$:**

   (a) Vérifier que $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad kC_n^k = (n - k + 1)C_n^{k-1}$

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
   $$\int_0^q t^{n-k-1}(1-t)^k dt = \frac{p^k q^{n-k}}{n-k} + \frac{k}{n-k} \int_0^q t^{n-k}(1-t)^{k-1} dt$$

(c) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad F_{n,p}(k) = (n-k)C_n^k \int\limits_0^q t^{n-k-1}(1-t)^{k-1}dt$$

(On n'oubliera pas les cas où $k = 0$ et le cas particulier de $n = 1$)

(d) Vérifier alors que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \forall k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$F_{n,p}(k) = (n-k)C_n^k \int_p^1 (1-t)^{n-k-1}t^k dt$$

Dans toute la suite du problème λ désigne un réel strictement positif.

3. **Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires :**
Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on définit la variable aléatoire discrète S_n par :

$$\begin{cases} \forall k \in [[0, n]] & P(S_n = k) = C_n^k \left[\dfrac{\lambda}{n}\right]^k \left[1 - \dfrac{\lambda}{n}\right]^{n-k} \\ \forall k > n & P(S_n = k) = 0 \end{cases}$$

(a) Vérifier que $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(S_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \left[\prod_{j=0}^{k-1}(1 - \dfrac{j}{n})\right] \dfrac{\left[1 - \dfrac{\lambda}{n}\right]^n}{\left[1 - \dfrac{\lambda}{n}\right]^k}$

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - \dfrac{\lambda}{n}\right]^n = e^{-\lambda}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$, déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
Ainsi, si l'on considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ; on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = P(X = k)$$

4. **Dans cette question, on suppose que** $n > \lambda$

(a) Déduire de la question 3 que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} F_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) = \pi_\lambda(x)$

(b) A l'aide de la question 2, vérifier que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$F_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) = \frac{1}{k!}\frac{(n-1)...(n-k)}{n^k} \int\limits_\lambda^n \left[1 - \frac{x}{n}\right]^{n-k-1} x^k dx$$

(c) Déduire alors de ce qui précède que pour tout k fixé tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_\lambda^n \left[1 - \frac{x}{n}\right]^{n-k-1} x^k dx = \int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^k dx$$